ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 1: КОНУСЫ, ВЕЕРЫ, ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что выпуклый полиэдральный конус $\sigma \neq \mathbb{R}^n$ имеет (единственную) наименьшую грань $\sigma \cap (-\sigma)$, причём она является вершиной $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда σ является строго выпуклым.

2. Докажите, что любой минимальный набор образующих строго выпуклого полиэдрального конуса состоит из ненулевых векторов вдоль его одномерных граней (рёбер).

3. Докажите, что для любого полиэдрального конуса $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ его двойственный

$$\sigma^{\vee} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0 \text{ для любого } \boldsymbol{u} \in \sigma\}.$$

является полиэдральным конусом, имеет место равенство $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$, и $\sigma^{\vee}$ является строго выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim \sigma = n$.

4. Опишите торическое многообразие, соответствующее вееру с 3 одномерным конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ (и без двумерных конусов).

5. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 3 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^2$.

6*. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 4 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно одной из *поверхностей Хирцебруха* $F_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$. Здесь $\mathbb{C}P(-)$ обозначает проективизацию комплексного векторного расслоения, $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, а $\mathcal{O}(k) = \bar{\eta}^{\otimes k}$ обозначает k-тензорную степень сопряжённого к тавтологическому одномерному расслоению над $\mathbb{C}P^1$, $k \in \mathbb{Z}$.

7*. Покажите, что поверхность Хирцебруха F_k гомеоморфна $S^2 \times S^2$ при чётном k и гомеоморфна $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ при нечётном k, где $\#$ обозначает связную сумму ориентированных многообразий, а $\overline{\mathbb{C}P}^2$ есть $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией.

8. Пусть U — дополнение до произвольного набора координатных плоскостей вида $\{\boldsymbol{z} \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}$ в $\mathbb{C}^m$. Докажите, что U — неособое торическое многообразие, опишите его покрытие аффинными торическими многообразиями и соответствующий веер Σ в $\mathbb{R}^m$.

9. Пусть $N \cong \mathbb{Z}^n$ — решётка, $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ — задаваемый ей алгебраический тор, $M = N^*$ — решётка характеров тора и $\mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$ — алгебра регулярных функций на торе. Предположим, что $A \subset \mathbb{C}[M]$ — подмножество функций, инвариантное относительно действия тора. Докажите, что

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m,$$

т. е. A порождено содержащимися в нём характерами тора.

Date: 28 сентября 2020 г.