ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 2: МНОГОГРАННИКИ И НОРМАЛЬНЫЕ ВЕЕРЫ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Выпуклый n-мерный многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы, и называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Докажите, что при $n \geqslant 3$ если многогранник является одновременно простым и симплициальным, то это — симплекс.

2. Для выпуклого многогранника P в аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$ определим его *полярное множество* как

$$P^* = \{\boldsymbol{u} \in M_{\mathbb{R}}^* \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для всех } \boldsymbol{x} \in P\}.$$

Докажите, что

а) P^* является выпуклым многогранником (в частности, ограничено) тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$;
б) $(P^*)^* = \operatorname{conv}(P, \mathbf{0})$, так что $P \subset (P^*)^*$ и $(P^*)^* = P$, если $\mathbf{0} \in P$.

3. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если между их граням можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение включения. Докажите, что n-мерный простой многогранник, все двумерные грани которого являются четырёхугольниками, комбинаторно эквивалентен n-мерному кубу.

4. Докажите, что каждый из двух многогранников, получаемых разрезанием симплекса Δ^n гиперплоскостью, не проходящей через вершины, комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов. Выведите отсюда, что каждый n-мерный простой многогранник с $n+2$ гипергранями комбинаторно эквивалентен (и даже проективно эквивалентен) произведению двух симплексов.

5. Пусть n-мерный многогранник P задан как пересечение полупространств (т. е. системой линейных неравенств) в n-мерном аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$:

$$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

где $\boldsymbol{a}_i \in M_{\mathbb{R}}^*$, $b_i \in \mathbb{R}$. Предположим, что среди неравенств $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0$ нет *лишних*, т. е. удаление любого неравентва из системы изменяет задаваемое ими множество. Докажите, что в этом случае каждое множество

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0\}$$

является гипергранью многогранника P.

6. Пусть P — многогранник как в предыдущей задаче. Для каждой грани $Q \subset P$ рассмотрим конус

$$\sigma_Q = \{\boldsymbol{u} \in M_{\mathbb{R}}^* \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}' \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ для любых } \boldsymbol{x}' \in Q \text{ и } \boldsymbol{x} \in P\},$$

двойственный к многогранному углу при грани Q (порождённому всеми векторами $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ из $\boldsymbol{x}' \in Q$ в $\boldsymbol{x} \in P$). Докажите, что конус σ_Q имеет минимальный набор образующих, состоящий из векторов $\boldsymbol{a}_i$, для которых $Q \subset F_i$.

Date: 12 октября 2020 г.

7. Докажите, что набор конусов $\Sigma_P = \{\sigma_Q \colon Q$ есть грань в $P\}$ является полным веером в пространстве $N_\mathbb{R} = M_\mathbb{R}^*$, причём этот веер является симплициальным тогда и только тогда, когда P — простой многогранник.

8. Докажите, что если $\mathbf{0}$ содержится во внутренности P, но веер Σ_P состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^*.

9. Определим *опорную функцию* $\psi_P \colon M_\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ выпуклого многогранника $P \in M_\mathbb{R}$ формулой

$$\psi_P(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in P}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

Докажите, что

а) функция ψ_P непрерывна на $M_\mathbb{R}^*$ и линейна на конусах σ нормального веера Σ_P, т. е. $\psi_P(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$ при $\boldsymbol{u} \in \sigma$ для некоторого $\boldsymbol{m}_\sigma \in M_\mathbb{R}$;

б) функция ψ_P *строго выпукла* в следующем смысле: для любого максимального (n-мерного) конуса $\sigma \in \Sigma_P$ при $\boldsymbol{u} \notin \sigma$ имеет место строгое неравенство $\psi_P(\boldsymbol{u}) < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$.