ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 3: РАССЛОЕНИЯ И ДИВИЗОРЫ, ПРОЕКТИВНЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, КОГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок гладких $\mathbb{C}$-значных функций на гладком многообразии M. Докажите, что $H^i(M;\mathcal{A}) = 0$ при $i > 0$. (Указание: используйте разбиение единицы.)

2. Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на комплексном многообразии. Докажите, что

а) $H^i(\mathbb{C}P^n;\mathcal{O}) = 0$ при $i > 0$;
б) $H^1(\mathbb{C}/\Gamma;\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}$, где $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ — решётка в $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}/\Gamma \cong T^2$ — комплексный тор.

3. Докажите, что сопоставление $D \mapsto L_D$ дивизору Картье одномерного расслоения на комплексном многообразии M обладает следующими свойствами:

а) если D — дивизор глобальной мероформной функции на M, то $L_D = \mathcal{O}$ — тривиальное расслоение;
б) $L_{D+D'} \cong L_D \otimes L_{D'}$. В частности, $L_{-D} \cong L_D^* \cong \overline{L_D}$, где $L_D^* \cong \mathrm{Hom}(L_D,\mathcal{O})$ — двойственное расслоение, а $\overline{L_D}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

4. Обозначим через $\mathcal{O}(1)$ одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, соответствующее дивизору-гиперплоскости. Докажите, что тавтологическое расслоение η (расслоение Хопфа), слоем которого над точкой $z \in \mathbb{C}P^n$ является прямая, представляющая эту точку, изоморфно $\mathcal{O}(-1)$.

5. Запишите явно систему однородных уравнений в проективном пространстве, задающих каждую поверхность Хирцебруха $F_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$.

6. Опишите вложение проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ в проективное пространство, соответствующее одномерному многограннику — отрезку $[0,k]$ в $\mathbb{R}^1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что любое полное двумерное торическое многообразие проективно.

8. Докажите, что на комплексном многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, состоящем из k-плоскостей в $\mathbb{C}^n$, при $2 \leqslant k \leqslant n-2$ нельзя задать алгебраическое действие тора, превращающее его в торическое многообразие.

9. Для каждой пары целых чисел $0 \leqslant i \leqslant j$ рассмотрим *гиперповерхность Милнора*

$$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \colon z_0w_0 + \dots + z_iw_i = 0\}.$$

а) Докажите, что H_{ij} является неособым проективным алгебраическим многообразием.
б) Докажите, что H_{ij} можно отождествить с тотальным пространством некоторого расслоения над $\mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.
в)* При каких i,j на многообразии H_{ij} можно задать действие тора, превращающее его в торическое многообразие?

Date: 26 октября 2020 г.