ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 4: ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ КАК ФАКТОРПРОСТРАНСТВА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Для конечно порождённой свободной абелевой группы (*решётки*) $N \cong \mathbb{Z}^n$ рассмотрим соответствующий алгебраический тор $\mathbb{C}_N^\times = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$. Пусть дана точная последовательность конечно порождённых абелевых групп

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

где F — конечная группа, а L, M, N — решётки. Докажите, что ей соответствует точная последовательность коммутативных алгебраических групп

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{C}_M^\times \longrightarrow \mathbb{C}_N^\times \longrightarrow 1,$$

где $H \cong \mathbb{C}_L^\times \times F$.

2. Докажите, что образующие одномерных конусов веера $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ линейно порождают пространство $N_\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда торическое многообразие V_Σ не представляется в виде $V_{\Sigma'} \times \mathbb{C}^\times$, где $V_{\Sigma'}$ — другое торическое многообразие.

3. Для веера $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ с примитивными образующими $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ рассмотрим отображение решёток $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$, и соответствующее отображение торов $\exp A\colon (\mathbb{C}^\times)^m \to \mathbb{C}_N^\times$. Определим группу G из точной последовательности

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^m \longrightarrow \mathbb{C}_N^\times \longrightarrow 1.$$

а) Докажите, что группа G имеет вид

$$G = \Bigl\{(t_1, \ldots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m \colon \prod_{i=1}^m t_i^{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i \rangle} = 1 \quad \text{для любого } \boldsymbol{u} \in N^*\Bigr\}.$$

б) Докажите, что если $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle \cong N_\mathbb{R}$, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n} \times F$, где $F = N/\mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ — конечная группа.

в) Докажите, что если веер Σ содержит хотя бы один неособый n-мерный конус, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$.

г) Докажите, любой лорановский моном от $z_1, \ldots, z_m$, инвариантный относительно действия G на $\mathbb{C}^m$ имеет вид $\prod_{i=1}^m z_i^{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i \rangle}$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in N^*$.

4*. Для конуса $\sigma \in \Sigma$, порождённого векторами $\boldsymbol{a}_{i_1} \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$, положим $g(\sigma) = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ и рассмотрим моном $z^{\hat\sigma} = \prod_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Определим

$$U(\sigma) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon z^{\hat\sigma} \neq 0\} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon z_j \neq 0 \ \text{ при } \ j \notin g(\sigma)\}, \quad U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma).$$

Докажите, что если веер Σ не является симплициальным, то для действия G на $U(\sigma)$ (и на $U(\Sigma)$) существует незамкнутая орбита.

5. Действие топологической группы H на топологическом пространстве X называется *собственным*, если отображение $H \times X \to X \times X$, $(h, x) \mapsto (hx, x)$, собственно, т. е. прообраз компактного подмножества компактен. Докажите, что

а) действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, заданное формулой $(t, (z_1, z_2)) \mapsto (tz_1, tz_2)$, собственно;

Date: 9 ноября 2020 г.

б) действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, заданное формулой $(t,(z_1,z_2)) \mapsto (tz_1, t^{-1}z_2)$, не является собственным, хотя все его орбиты замкнуты.

6*. Докажите, что определённое выше действие группы G на пространстве $U(\Sigma)$ собственно, если веер Σ является симплициальным. (Указание: рассуждение аналогично доказательству замкнутости орбит. А именно, покажите, что если последовательности $\{\boldsymbol{z}^{(k)}\}$ и $\{\boldsymbol{g}^{(k)}\boldsymbol{z}^{(k)}\}$ имеют пределы в $U(\Sigma)$, то и в $\{\boldsymbol{g}^{(k)}\}$ можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в G.)

7. Докажите, что факторпространство X/G локально компактного хаусдорфова пространства (в частности, многообразия) X по собственному действию группы G хаусдорфово. Выведите отсюда, что факторпространство $U(\Sigma)/G$, соответствующее симплициальному вееру Σ, хаусдорфово. Это даёт альтернативное топологическое доказательство отделимости торических многообразий, получаемых склейкой аффинных частей, в симплициальном случае.

8. Пусть Σ — неособый (регулярный) веер, причём $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m\rangle \cong N_\mathbb{R}$. Убедитесь, что пространство $U(\Sigma)$ является 2-связным. Докажите, рассмотрев точную гомотопическую последовательность главного G-расслоения $U(\Sigma) \to V_\Sigma$, что неособое торическое многообразие V_Σ является односвязным, а группа $H_2(V_\Sigma;\mathbb{Z})$ естественно отождествляется с ядром отображения $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$. Следовательно, $H^2(V_\Sigma;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m/N^*$, что совпадает с группой Пикара многообразия V_Σ.