ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ЛИСТОК 5: ГАМИЛЬТОНОВЫ ДЕЙСТВИЯ ТОРА И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что отображение моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$ для покоординатного действия тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ с симплектической формой $\omega = i\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\overline{z}_k$ имеет вид $\mu(z_1,\ldots,z_m) = (|z_1|^2,\ldots,|z_m|^2)$.

2. Пусть дано гамильтоново действие тора T на симплектическом многообразии W с собственным отображением моментов $\mu\colon W \to \mathfrak{t}^*$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{t}^*$ — регулярное значение отображения моментов, т. е. дифференциал $D\mu\colon \mathcal{T}_xW \to \mathfrak{t}^*$ сюръективен для любого $x \in \mu^{-1}(\boldsymbol{u})$. Докажите, что

а) множество уровня $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ является гладким компактным T-инвариантным подмногообразием в W;
б) действие тора T на $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ почти свободно (все стабилизаторы конечны).

3. Пусть
$$P = \{\boldsymbol{u} \in N^*_{\mathbb{R}}\colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u}\rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ldots,m\}$$
— дельзанов многогранник с вершинами в решётке $N^* \cong \mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ — его внутренние примитивные нормали граней, Σ_P — соответствующий неособый нормальный веер. Рассмотрим отображение решёток $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$, и соответствующий гомоморфизм (компактных) торов $\exp A\colon \mathbb{T}^m \to T_N$, где $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}^n$. Определим группу K из точной последовательности
$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{T}^m \longrightarrow T_N \longrightarrow 1.$$

а) Докажите, что $K \cong \mathbb{T}^{m-n}$.

Рассмотрим отображение моментов
$$\mu_P\colon \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varGamma} \mathfrak{k}^*$$
для действия тора K на $\mathbb{C}^m$, получаемого ограничением гамильтонова действия тора $\mathbb{T}^m$, и положим $\boldsymbol{b} = (b_1,\ldots,b_m)^t$. Докажите, что

б) $\boldsymbol{u} = \varGamma\boldsymbol{b}$ является регулярным значением отображения μ_P;
в) действие тора K на $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ свободно;
г) $\mu^{-1}(\boldsymbol{u}) \subset U(\Sigma_P)$, где $U(\Sigma_P)$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}^m$ (дополнение набора координатных плоскостей), задаваемое веером Σ_P, см. задачу 4.4.

Гладкое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P = \mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ называется *момент-угол-многообразием*, а $M_P = \mu^{-1}(\boldsymbol{u})/K$ — *гамильтоновым торическим многообразием*, соответствующим многограннику P.

4. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с одномерными конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $-\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_2$, задающий поверхность Хирцебруха H_k, $k \in \mathbb{Z}$.

а) Убедитесь, что Σ — нормальный веер дельзанового четырёхугольнка P с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(k+1,1)$ и $(0,1)$.
б) Запишите явно в координатах отображение моментов μ_P и пересечение квадрик, задающее момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P$.

Date: 7 декабря 2020 г.

в) Докажите, что $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно произведению $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, где

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{C}^2$.

г) Представьте поверхность Хирцебруха H_k в виде фактормногообразия произведения $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ по явно заданному двумерному подтору в $\mathbb{T}^4$.

5*. Пусть P — дельзанов пятиугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ и $(0,2)$. Докажите, что соответствующее момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно $(S^3 \times S^4)^{\#5}$ — связной сумме пяти экземпляров произведения сфер $S^3 \times S^4$.