

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ-2

Лекция 2 (17 сентября 2020)

Пространства модулей кривых малых родов (продолжение)

2.0. Детали геометрической теории инвариантов 1
 ...2.0.0. Хорошие и плохие орбиты 1
 ...2.0.1. Срезы 2
 ...2.0.2. Обозначения для цепочек срезов 3
 2.1. \mathcal{M}_1 и структуры на нём 3
 ...2.1.0. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_9 \setminus \text{Sing}_9}{\text{PGL}_3}$ 3
 ...2.1.1. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_6 \setminus \text{Sing}_6}{G_5}$ 4
 ...2.1.2. Касательные из точки перегиба 7
 ...2.1.3. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_5 \setminus \text{Sing}_5}{G_4}$ 8
 ...2.1.4. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{A}_4 \setminus \text{Sing}_4}{G_3}$ 9
 ...2.1.5. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{A}_2 \setminus \text{Sing}_2}{G_1}$ 10
 ...2.1.6. На пути к универсальному семейству 10
 2. Немного об \mathcal{M}_2 12
 Литература 12

В этой лекции продолжается описание пространств модулей кривых малых родов. Основная задача – ввести структуры алгебраических многообразий на уже определённых множествах $\mathcal{M}_g(\mathbb{k})$.

2.0. Детали геометрической теории инвариантов

2.0.0. Хорошие и плохие орбиты. Воспроизведём понятия и обозначения конца предыдущей лекции. Пусть G – группа, действующая на множестве \mathcal{Z} . Не давая точных определений (они будут приводиться в конкретных случаях), постулируем разбиение множества на два непересекающиеся G -инвариантных подмножества:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{\text{good}} \amalg \mathcal{Z}^{\text{bad}}.$$

Интуитивно $\mathcal{Z}^{\text{good}}$ состоит из *регулярных* (похожих, в чём-то одинаковых) орбит, а \mathcal{Z}^{bad} – из *вырожденных*. Например, если окружность $G = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ действует на плоскости $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^2$ поворотами

$$\varphi \cdot (x, y) := ((\cos \varphi)x + (\sin \varphi)y, -(\sin \varphi)x + (\cos \varphi)y)$$

то

$$\mathcal{Z}^{\text{bad}} = \{(0, 0)\}, \quad \mathcal{Z}^{\text{good}} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

В конце прошлой лекции мы работали со случаем проективизации (10-мерного) пространства многочленов степени 3 от 3-х переменных

$$\mathcal{Z} := \mathbf{P}\mathbb{k}[x : y : z]_3 \simeq \mathbf{P}_9(\mathbb{k}),$$

на котором линейными заменами переменных действует *проективная линейная* группа

$$G := \mathrm{PGL}_3(\mathbb{k}) = \frac{\mathrm{GL}_3(\mathbb{k})}{\mathbb{k}^\times}$$

представляющая собой фактор линейной группы по центру, группе *скалярных* матриц. Были выделены множества

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{good}} := \{\text{многочлены, задающие } \textit{гладкие} \text{ кубики}\}$$

и (имея в виду дальнейшие действия, мы чуть-чуть усложняем обозначения)

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{bad}} = \mathbf{Sing}_9 := \{\text{многочлены, задающие } \textit{особые} \text{ кубики}\};$$

чтобы не вдаваться в детали определений, проще определить его как дополнение $\mathcal{Z}^{\mathrm{bad}} := \mathbf{P}_9(\mathbb{k}) \setminus \mathcal{Z}^{\mathrm{good}}$.

Пример важен для нас тем, что, как было установлено, на уровне множеств (другие структуры мы пока не рассматривали)

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{k}) \simeq \frac{\mathbf{P}_9(\mathbb{k}) \setminus \mathbf{Sing}_9}{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{k})}.$$

Нам предстоит тщательно описать это множество вместе с теми структурами, которые на нём обнаружатся.

Предостережение. Мы сильно упростили проблему *что такое хорошо и что такое плохо?* в теории инвариантов. Так, есть промежуточное между хорошим и плохим понятие *полустабильности* отбит, см. [ДьёКэрМам1974].

2.0.1. Срезы. Продолжим общие рассмотрения группы G , действующей на множестве \mathcal{Z} . Для изучения фактора $\frac{\mathcal{Z}}{G}$ иногда удаётся уменьшить и группу, и множество.

Для любого подмножества $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ введём *стационарную группу*

$$G_{\mathcal{Y}} := \{g \in G \mid g \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}\}$$

(разумеется, для наугад взятого множества эта группа может оказаться тривиальной). Определено отображение

$$\frac{\mathcal{Y}}{G_{\mathcal{Y}}} \longrightarrow \frac{\mathcal{Z}}{G} : [y]_{G_{\mathcal{Y}}} \mapsto [y]_G.$$

Предложение. *Это отображение сюръективно, если \mathcal{Y} содержит представителей всех орбит, и инъективно, если*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y} [[y_2 \in G \cdot y_1] \implies [y_2 \in G_{\mathcal{Y}} \cdot y_1]]. \blacksquare$$

Обычно эта конструкция применяется при наличии некоторых структур и на множестве \mathcal{Z} , и на группе G ; желательно построение срезов \mathcal{Y} , на которых имеются те же структуры. Для случая гладких многообразий см. [Palais1961].

Алгебро-геометрические структуры сложнее; см. сравнительно элементарные введения в [ДьёКэрМам1974], [Крафт1987] и более основательные в классической монографии [MumFogKir1994], а также в работе [Mum1977], в

которой особое внимание уделено пространствам модулей.

2.0.2. Обозначения для цепочек срезов

В удачных случаях (именно с ними мы будем встречаться) выделение срезов удаётся итерировать.

Возникают множества

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \supset \mathcal{Z}_1 \supset \mathcal{Z}_2 \supset \dots,$$

и группы

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$$

такие, что

$$\frac{\mathcal{Z}^{\text{good}}}{G} = \frac{\mathcal{Z}_0^{\text{good}}}{G_0} \cong \frac{\mathcal{Z}_1^{\text{good}}}{G_1} \cong \frac{\mathcal{Z}_2^{\text{good}}}{G_2} \cong \dots$$

2.1. \mathcal{M}_1 и структуры на нём

2.1.0. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_9 \setminus \text{Sing}_9}{\text{PGL}_3}$. Начнём с обсуждавшегося в лекции 1 десятичленного уравнения самой общей плоской проективной кубики

$$F := \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0, \quad (2.1.0a)$$

или

$$\begin{aligned} & a_{300}x^3 + \\ & + a_{210}x^2y + a_{201}x^2z + \\ & + a_{120}xy^2 + a_{111}xyz + a_{102}xz^2 + \\ & + a_{030}y^3 + a_{021}y^2z + a_{012}yz^2 + a_{003}z^3 = \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.1.0a')$$

Здесь $(a_{300} : \dots : a_{003}) \in \mathbf{P}_9$ – произвольные коэффициенты ненулевого однородного многочлена $F \in \mathbb{k}[x : y : z]_3 \setminus \{0\}$.

Группа $\text{PGL}_3(\mathbb{k}) = \frac{\text{GL}_3(\mathbb{k})}{\mathbb{k}^\times}$ линейно действует на плоскости $\mathbf{P}_2(\mathbb{k})$, в которой лежат рассматриваемые кубики. Чтобы распространить это действие на множество кубик, надо определить его на множество *уравнений* кубик, то есть на проективном пространстве $\mathbf{P}\mathbb{k}[x : y : z]_3 \simeq \mathbf{P}_9(\mathbb{k})$. В векторном виде это действие задаётся формулой

$$([M]_{\mathbb{k}^\times} \cdot F) : \left[\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mapsto F \left(M^{-1} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \right) \right]_{\mathbb{k}^\times}, \quad (2.1.0b)$$

где подразумевается $M \in \text{GL}_3(\mathbb{k})$, $[M]_{\mathbb{k}^\times} \in \text{PGL}_3(\mathbb{k})$.

В обозначениях предыдущего раздела мы начинаем конструкцию пространства модулей \mathcal{M}_1 с множества

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 = \mathbf{P}_9(\mathbb{k})$$

и группы¹

$$G_8 = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{k}),$$

действующей на $\mathbf{P}_9(\mathbb{k})$ по формуле (2.1.0b)².

Плохое множество

$$\mathcal{Z}_0^{\mathrm{bad}} =: \mathbf{Sing}_9$$

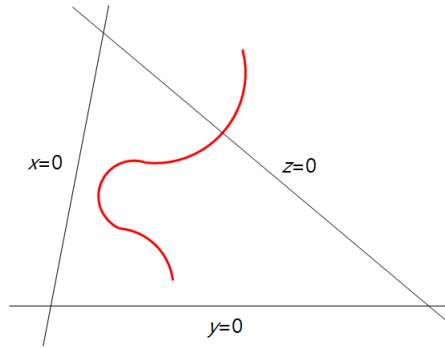
состоит из наборов коэффициентов, определяющих *особые* кубики. Явный вид уравнения этого множества (являющегося *гиперповерхностью* в $\mathbf{P}_9(\mathbb{k})$) настолько громоздок, что не может быть и речи о написании его в явном виде. Тем не менее в задаче **2.2.** предлагается ответить на естественный вопрос об этом множестве. С его геометрией можно познакомиться по [Dolgachev2003] и [Крафт1987].

Из предложения раздела **2.0.1** и задачи **2.6** вытекает биекция

$$\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_9 \setminus \mathbf{Sing}_9}{\mathrm{PGL}_3}$$

В принципе это позволяет ввести на пространствах модулей \mathcal{M}_1 некоторые алгебро-геометрические структуры. Мы, однако, отложим обсуждение этих структур до получения более экономных описаний множеств $\mathcal{M}_1(\mathbb{k})$.

2.1.1. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_6 \setminus \mathbf{Sing}_6}{G_5}$. Будем считать, что произвольная гладкая кубика лежит в некоординатизованной (пока) проективной плоскости, и начнём подбирать удобные координаты.



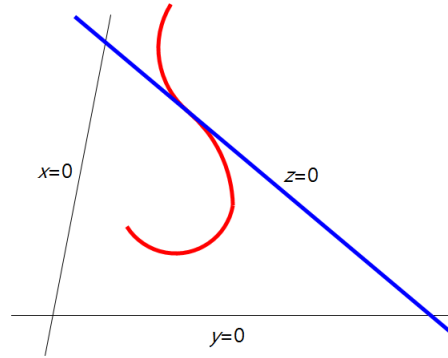
На каждой гладкой плоской кубике есть по крайней мере одна³ *прямая перегиба*⁴ – см. любой учебник по алгебраической геометрии, например, [ГриХар1982]. Пусть это – “бесконечная” прямая “ $z = 0$ ”.

¹индексы групп теперь будут обозначать размерности

²в более обычной терминологии мы работаем с *симметрическим кубом проективизации* стандартного представления группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{k})$

³а на самом деле девять

⁴Здесь рекомендуется выполнить упражнение 2.3.



Уравнение (2.1.0a') на прямой " $z = 0$ " превращается в

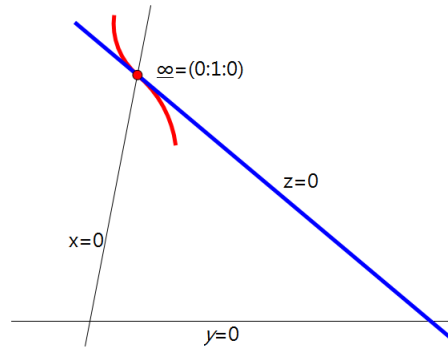
$$a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{030}y^3 = 0; \quad (2.1.1a)$$

мы рассматриваем выбор координатной оси " $z = 0$ ", при котором это выражение – куб линейной формы. Делаем традиционный выбор

$$a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{030}y^3 \equiv a_{300}x^3,$$

то есть

$$\boxed{a_{210} = a_{120} = a_{030} = 0} \quad (2.1.1b)$$



В результате десятичленное уравнение (2.1.0a') сокращается до семичленного

$$a_{300}x^3 + a_{201}x^2z + a_{111}xyz + a_{102}xz^2 + a_{021}y^2z + a_{012}yz^2 + a_{003}z^3 = 0,$$

которое мы перепишем, отказавшись от трёхиндексных коэффициентов, в виде

$$\boxed{ax^3 + by^2z + cxyz + dx^2z + eyz^2 + fxz^2 + gz^3 = 0} \quad (2.1.1c)$$

Теперь мы параметризуем наши кубики точками

$$(a : b : c : d : e : f : g) \in \mathbf{P}_6$$

шестимерного проективного пространства. Алфавитный порядок, в котором мы обозначили коэффициенты, может показаться случайным; он, однако, совпадает с порядком, в котором мы записывали мономы при выводе уравнения (1.1.1a) *абстрактной* кривой рода 1.

Уравнение множества параметров $\mathbf{Sing}_6 \subset \mathbf{P}_6$, соответствующих особым кубикам, уже может быть выписано явно:

$$\begin{aligned} ab(432a^2b^3g^2 - 216a^2b^2e^2g + 27a^2be^4 - 288ab^3dfg + 64ab^3f^3 + 72ab^2c^2fg + 144ab^2cdeg \\ - 96ab^2cef^2 + 72ab^2de^2f - 36abc^3eg + 30abc^2e^2f - 36abcde^3 + ac^3e^3 + 64b^3d^3g \\ - 16b^3d^2f^2 - 48b^2c^2d^2g + 8b^2c^2df^2 + 16b^2cd^2ef - 16b^2d^3e^2 + 12bc^4dg - bc^4f^2 \\ - 8bc^3def + 8bc^2d^2e^2 - c^6g + c^5ef - c^4de^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.1d)$$

Нетрудно проверить, что подгруппа группы PGL_3 , сохраняющая при линейных преобразованиях переменных x, y, z прямую " $z = 0$ ", состоит из преобразований вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} & n_{02} \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} \\ 0 & 0 & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

а подгруппа этой группы, сохраняющая точку $\infty = (0 : 1 : 0)$ – из преобразований

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{00} & 0 & n_{02} \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} \\ 0 & 0 & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.1.1e)$$

Образовавшаяся группа

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

плохо выглядит и никак не называется (даже прямая проверка того, что это – группа, скучна и не поучительна). Мы пойдём нетрадиционным путём, чтобы справиться с этим (чисто методическим!) затруднением. Временно объявим **нетрадиционный алфавитный порядок**⁵

$$\boxed{y \prec x \prec z}$$

тогда группа преобразований (2.1.1e) заменится на

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ x' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (2.1.1e')$$

и та же группа предстанет как хорошо известная *борелевская*⁶ подгруппа линейной группы

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

– точнее, её 5-мерный образ в PGL_3 . Мы обозначим её

$$\mathrm{Vor}_3(\mathbb{k}) := \frac{\left\{ \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{k}) \mid m_{00}m_{11}m_{22} \neq 0 \right\}}{\mathbb{k}^\times}$$

⁵вскоре мы отойдём от векторного формализма и принятое решение перестанет нас отвлекать.

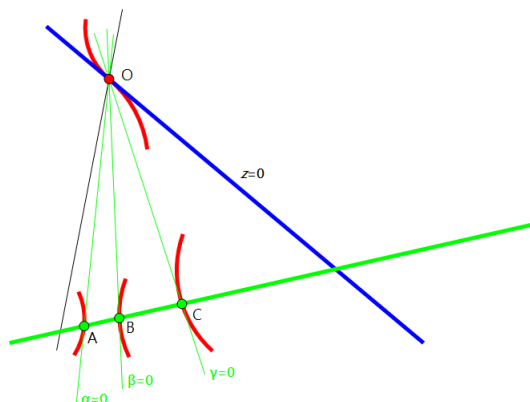
⁶максимальная разрешимая, см. [Хамфри1980]

Из предложения раздела 2.0.1 и из задачи 2.6 вытекает биекция

$$\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_6 \setminus \mathbf{Sing}_6}{\text{Bor}_3}$$

2.1.2. Касательные из точки перегиба. Для следующего шага нам понадобится одно свойство плоских кубических кривых, которое мы установим сначала (алгебро-)геометрически, а потом алгебраически.

Предложение. *Из точки перегиба гладкой плоской проективной кубики проводятся, помимо прямой перегиба, ещё три касательные к кубике; получаемые точки касания коллинеарны.*



Доказательство. Отметим, что формулировка предложения не связана с нашими предыдущими действиями – и вообще с уравнениями. Поэтому мы переименовали нашу ”бесконечную” точку в O – она будет нейтральным элементом в имеющейся на кубике *групповой структуре*, которой мы вскоре воспользуемся. От предыдущих действий по выбору координат мы сохраним только уравнение $'z = 0'$ прямой перегиба.

Количество касательных к плоской проективной кривой связано с понятием её *класса*, то есть количества касательных из *общей* точки (см. [Coolidge2004]). Класс гладкой кубики равен 6 (в этом можно убедиться, рассмотрев в аффинной плоскости семейство прямых $y - y_0 = k(x - x_0)$, подставив это уравнение в уравнение кубики и вычислив дискриминант по x получившегося многочлена; этот дискриминант окажется многочленом от k степени 6). В случае, когда касательные проводятся из *общей* точки кубики, сливаются две касательные, а если из точки перегиба – то три; остаётся три ”ещё”, как и утверждается.

На чертеже точки касания обозначены через A, B, C , уравнения, а задающие касательные – через $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Обозначим, наконец, через \mathbf{X} рассматриваемую кубикку.

В группе $\text{Div}(\mathbf{X})$ выполняются очевидные из чертежа соотношения

$$\begin{aligned}\text{div}(\alpha) &= O + 2A, \\ \text{div}(\beta) &= O + 2B, \\ \text{div}(\gamma) &= O + 2C, \\ \text{div}(z) &= 3O,\end{aligned}$$

из которых в группе $\text{Pic}(\mathbf{X})$ вытекают соотношения

$$2A \equiv 2B \equiv 2C \equiv 2O.$$

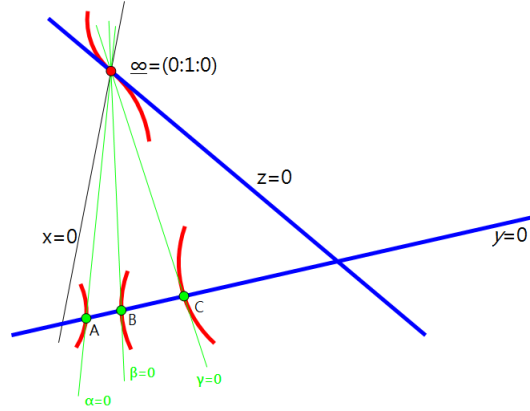
Принимая O за нейтральный элемент в $\mathbf{X} \simeq \text{Pic}(\mathbf{X})$, выводим предложения из очевидного факта в коммутативной группе точки 2-го порядка образуют подгруппу. ■

2.1.3. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{P}_5 \setminus \text{Sing}_5}{G_4}$. Поскольку борелевская группа Bor_3 сохраняет "бесконечную" прямую " $z = 0$ ", она сохраняет и дополнение к ней, которое мы будем считать "конечной", *аффинной* частью $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{P}_2$ проективной плоскости. В связи с этим мы уже сейчас начнём внедрять аффинную терминологию и, в частности, прямую " $y = 0$ " называть *осью абсцисс*.

Доказанное в предыдущем разделе предложение диктует нам выбор оси абсцисс.

Теорема. Пусть $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$. Тогда выбор в качестве оси абсцисс прямой, гарантированной предыдущим предложением (то есть проходящей через точки касания касательных, проведённых из точки перегиба), обеспечивает переход от 7-членного уравнения (2.1.1с) до 6-членного

$$\boxed{ax^3 + by^2z + dx^2z + eyz^2 + fxz^2 + gz^3 = 0} \quad (2.1.3a)$$



Доказательство. В аффинных координатах уравнение 7-членное уравнение имеет вид

$$ax^3 + by^2 + cxy + dx^2 + ey + fx + g = 0, \quad (2.1.3b)$$

и *перекрёстный* член cxy уничтожается подходящим аффинным преобразованием $y \leftarrow y + tx$; в аффинной плоскости с координатами x, y зелёные касательные становятся "горизонтальными". Детали читателю предлагается восполнить в

упражнении **2.8.** ■

Уравнение множества параметров $\mathbf{Sing}_5 \subset \mathbf{P}_5$, соответствующих особым кубикам, становится более обозримым:

$$ab(432a^2b^3g^2 - 216a^2b^2e^2g + 27a^2be^4 - 288ab^3dfg + 64ab^3f^3 + 72ab^2de^2f + 64b^3d^3g - 16b^3d^2f^2 - 16b^2d^3e^2) = 0 \quad (2.1.1h)$$

Группа G_4 преобразований, сохраняющих уравнение (2.1.3a), состоит из преобразований

$$x = mx' + nz', y = oy' + pz', z = rz',$$

где $mor \neq 0$ и все 5 коэффициентов ($m : n : o : p : r$) определены с точностью до общего ненулевого множителя.

2.1.4. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{A}_4 \setminus \mathbf{Sing}_4}{G_3}$. Уравнение (2.1.1h) явно показывает приводимость множества параметров особых кривых, содержа множитель ab . Этот множитель легко проанализировать, особенно в аффинных координатах (2.1.3b): если выполняется $a = 0$, то (2.1.3b) задаёт не кубику, в *конике* (то есть проективная кубика – это объединение коники с бесконечной прямой), а если $b = 0$, то уравнение (2.1.3b) становится разрешимым относительно y и потому задаёт кривую рода не 1, а 0.

Таким образом, гиперповерхность $\mathbf{Sing}_5 \subset \mathbf{P}_5$ содержит две гиперплоскости, которые мы не учитываем при построении пространства модулей \mathcal{M}_1 ; мы можем их выбросить и перейти к аффинной базе.

В согласии с традицией мы полагаем в уравнении (2.1.3a)

$$a = -1, b = 1;$$

это уравнение, в котором некоторые мономы переносятся в правую часть, принимает 6-членный вид

$$y^2z + eyz^2 = x^3 - dx^2z - fxz^2 - gz^3, \quad (2.1.4a)$$

с которым мы будем тоже работать в аффинной форме

$$\boxed{y^2 + ey = x^3 - dx^2 - fx - g.} \quad (2.1.4b)$$

Уравнение множества параметров $\mathbf{Sing}_4 \subset \mathbf{A}_4$, соответствующих особым кубикам, впервые умещается в одну строчку:

$$-16d^3e^2 + 64d^3g - 16d^2f^2 - 72de^2f + 27e^4 + 288dfg - 216e^2g - 64f^3 + 432g^2 = 0. \quad (2.1.4c)$$

Группа G_3 преобразований, сохраняющих уравнение (2.1.1k), состоит из преобразований

$$x = \lambda^2x' + m, y = \lambda^3y' + n.$$

где $\lambda \in \mathbb{k}^\times$.

2.1.5. $\mathcal{M}_1 \simeq \frac{\mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{Sing}_2}{G_1}$. Теперь предположим, что $\text{char}(\mathbb{k}) \notin \{2, 3\}$. Тогда преобразования

$$x \leftarrow x + \frac{d}{3}, \quad y \leftarrow y - \frac{e}{2}$$

приводят, наконец, к кратчайшему возможному, 4-членному, уравнению плоской кубики

$$\boxed{y^2 = x^3 - fx - g} \quad (2.1.5a)$$

Детали предлагается восполнить в упражнении **2.10.** .

Множество параметров $\mathbf{Sing}_2 \subset \mathbf{A}_2$ свелось к *полукубической параболе*

$$27g^2 = 4f^3, \quad (2.1.5b)$$

а группа замен переменных – к

$$x = \lambda^2 x', \quad y = \lambda^3 y', \quad (2.1.5c)$$

где $\lambda \in \mathbb{k}^\times$. Оно сопровождается действием группы \mathbb{k}^\times на параметры (которое мы раньше опускали из-за громоздкости)

$$\lambda \cdot (e, f) = (\lambda^4 f, \lambda^6 g). \quad (2.1.5d)$$

Формулы (2.1.5a)–(2.1.5d) дают рекордно компактное описание пространства модулей

$$\boxed{\mathcal{M}_1(\mathbb{k}) = \frac{\mathbf{A}_2(\mathbb{k}) \setminus \mathbf{Sing}_2}{\mathbb{k}^\times}} \quad (2.1.5e)$$

как фактора аффинной поверхности по одномерной алгебраической группе. В таком виде нашу основную задачу наделения *множества* структурой *алгебраического многообразия* нетрудно было бы решить, см. [ДьёКэрМам1974].

Мы, однако, попытаемся завершить наш путь к $\mathcal{M}_1(\mathbb{k})$ как к явно заданному одномерному алгебро-геометрическому объекту над полем \mathbb{k} . В идеале **над каждой точкой пространства модулей хотелось бы видеть соответствующую ей кривую.**

Упомянутый идеал, однако, недостижим, и это составляет одну из главных проблем теории пространств модулей; на научном языке это называется *непредставимостью функтора семейств*. В следующем подразделе мы предпримем попытки приближения к идеалу.

2.1.6. На пути к универсальному семейству. Перепишем уравнение (2.1.5a) в более естественных обозначениях:

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (2.1.6a)$$

Условие гладкости такой кривой –

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0, \quad (2.1.6b)$$

и это позволяет ввести так называемый j -инвариант⁷ (см. [Silverman2009])

$$j = \frac{6912a^3}{4a^3 + 27b^2} = \frac{3^3 4^4 a^3}{4a^3 + 27b^2}, \quad (2.1.6c)$$

определяющий теоретико-множественную биекцию

$$j : \mathcal{M}_1(\mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}.$$

Однако эта биекция не является изоморфизмом (аффинных) алгебраических кривых! См. ниже.

Далее, можно рассмотреть *гексаверсальное* семейство

$$y^2 = x(x-1)(x-t) \quad (2.1.6d),$$

в котором

$$t \notin \{0, 1\} \quad (2.1.6f)$$

и для которого

$$j = \frac{256(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}. \quad (2.1.6f)$$

Название семейства объясняется тем, что (почти) каждая кривая встречается в нём шесть раз (об этом говорит степень правой части (2.1.6e)). Более того, морфизм $t \mapsto j$, определённый формулой (2.1.6f), является *накрытием Галуа*; если ввести (принимая во внимание (2.1.6f)) *дважды проколотую прямую*

$$\ddot{\mathbb{k}} := \mathbb{k} \setminus \{0, 1\}, \quad (2.1.6g)$$

то возникает *алгебро-геометрическая* реализация пространства модулей

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{k}) \simeq \frac{\ddot{\mathbb{k}}}{S_3} \quad (2.1.6h)$$

как *фактора аффинной кривой по конечной группе*, см. [Серр1968]. Неподвижные точки действия группы S_3 определяют *особенности* пространства $\mathcal{M}_1(\mathbb{k})$; они соответствуют замечательным кривым, к которым мы ещё вернёмся.

Представление, обобщающее (2.1.6h), будет обсуждаться и для высших родов.

Наконец, хорошее приближение к универсальному семейству доставляет семейство

$$y^2 = x^3 + m(x+1), \quad (2.1.6i)$$

для которого

$$j = \frac{6912m}{4m+27}, \quad (2.1.6j)$$

то есть морфизм $m \mapsto j$ имеет степень 1. Может даже показаться, что семейство (2.1.6i) – желанное универсальное семейство. Однако, разрешив соотношение (2.1.6j) относительно m , мы придём к семейству

$$\boxed{y^2 = x^3 - \frac{27}{4} \frac{j}{j-1728} (x+1)} \quad (2.1.k)$$

Его можно назвать *почти универсальным* – в нём над $j \notin \{0, 1728\}$ с j -инвариантом j . Однако над указанными исключительными значениями j (соответствующим

⁷Странные коэффициенты имеют глубокое арифметическое объяснение

тем же замечательным кривым, что выше) семейство портится.

Почти универсальные семейства существуют и для высших родов.

2. Немного об \mathcal{M}_2

Пусть \mathbf{X} – кривая рода 2. Согласно одному из определений рода, это значит, что

$$\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle;$$

это даёт непостоянную функцию $x \in \mathbb{k}(\mathbf{X}) \setminus \mathbb{k}$, и из теоремы Римана-Роха следует, что $\deg(x) = 2$, то есть

$$(\mathbb{k}(\mathbf{X}) : \mathbb{k}(x)) = 2$$

Как мы покажем ниже, отсюда следует существование аффинной модели кривой \mathbf{X} , задаваемой уравнением

$$y^2 = F,$$

где многочлен $F \in \mathbb{k}[x]_5$ или $F \in \mathbb{k}[x]_6$ не имеет кратных корней; построение гладкой проективной модели сложнее.

Однако существования аффинных моделей будет достаточно для определения пространства модулей

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{k}) \simeq \frac{\mathbb{k}[u : v]_6 \setminus \mathbf{Mult}}{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{k})},$$

где \mathbf{Mult} – множество бинарных форм, обладающих кратными линейными множителями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Coolidge2004] J.L. Coolidge, *A Treatise on Algebraic Plane Curves*. Oxford University Press, 1931, (Dover Publications 2004).
- [Dolgachev2003] Igor Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*. Cambridge University Press, 2003.
- [Mum1977] David Mumford, *Stability of projective varieties*. L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. IIE Série, 23 (1): 39–110.
- [MumFogKir1994] David Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), **34** (3rd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 1994.
- [Palais1961] Richard S. Palais, *On the Existence of Slices for Actions of Non-Compact Lie Groups*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 73, No. 2 (Mar., 1961), pp. 295–323.
- [Silverman2009] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, 2009.
- [ГриХар1982] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*. М.: Мир, 1982.
- [ДьёКэрМам1974] Ж. Дьёдонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд, *Геометрическая теория инвариантов*. М.: Мир, 1974.
- [Крафт1987] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*. Москва: Мир, 1987.
- [Серр1968] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*. Перев. с франц. — М.: Мир, 1968.
- [Хамфри1980] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*. Москва, Наука, 1980.