**Независимый Московский Университет,** осень 2020

Г.Б. Шабат,

# ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ-2

## Лекция 3 (24 сентября 2020)
## Геометрия пространств модулей кривых



В этой лекции мы завершаем предварительное описание пространств модулей кривых малых родов.

### 3.0. Функтор семейств

**3.0.0. Основная алгебро-геометрическая категория.** В этих лекциях мы избегаем погружения в проблемы оснований алгебраической геометрии, по возможности пытаясь ограничиться минимальными средствами.

Однако сегодня нам уже нужно понятие *произвольного* алгебро-геометрического объекта, и мы стоим перед выбором: ограничиться ли *квазипроективными* многообразиями над $\Bbbk$? Или работать с *абстрактными*, подробно описанными в [**Шафаревич2007**]? Или с (пред)схемами, изучив, например, [**EisHar1998**]? Или с этальными топологиями, следуя вводным главам [**Милн2000**]? Или с чем-то ещё более общим?

Выбирая более простые варианты, мы экономим время на изучение трудных оснований и добиваемся полной уверенности в понимании объектов, с которыми работаем (когда многообразие задано уравнениями в проективном пространстве, нам не надо задумываться об *отделимости*...); для наших непосредственных целей квазипроективных многообразий вполне достаточно. С другой стороны, выбор более общего класса объектов даёт возможность думать о распространении получаемых результатов на spec$\mathbb{Z}$, использовать нильпотенты при изучении деформаций и т. п.

Мы уклоняемся от выбора, фиксируем категорию, которой даём несколько двусмысленное имя

$$\mathcal{BAS}.$$

С одной стороны, это базовая категория для всех наших алгебро-геометрических рассмотрений; с другой, её объекты в основном будут служить базами *семейств кривых* (это понятие вскоре будет определено).

Мы не будем составлять полного списка аксиом категории $\mathcal{BAS}$ – это занятие грозило бы отправить нас в бездну оснований (см. [**GroDie1960**]). Ограничимся следующими требованиями.

• (*Принцип относительности* Гротендика). *Каждый объект* $\mathbf{B} \in\in \mathcal{BAS}$ *снабжён морфизмом* $\mathbf{B} \to \mathrm{spec}(\Bbbk)$ *как элементом основной структуры.* Так, все кольца (сечения структурного пучка) являются $\Bbbk$-алгебрами.
• *Гладкие полные кривые – объекты* $\mathcal{BAS}$.
• *Все* $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ *– объекты* $\mathcal{BAS}$.
• *В* $\mathcal{BAS}$ *существуют расслоённые произведения.* (см. [**Манин2012**]) Для данных морфизмов $\pi : \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ и $\pi' : \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ категории $\mathcal{BAS}$ в случае, когда объекты – множества *точек*, расслоённое произведение определяется как

$$(\mathcal{X}, \pi) \times_{\mathbf{B}} (\mathcal{X}'\pi') := \{(P, P') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}' \mid \pi(P) = \pi'(P')\};$$

указание на морфизмы обычно опускается. В общекатегорных терминах расслоённое произведение определяется с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \times_{\mathbf{B}} \mathcal{X}' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathcal{X} \arrow[dr] & & \mathcal{X}' \arrow[dl] \\
 & \mathbf{B} &
\end{tikzcd}$$

Все перечисленные выше категории – от квазипроективных многообразий до этальных топологий – годятся на роль $\mathcal{BAS}$.

**3.0.1. Слои морфизмов.** Пусть $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ – морфизм категории $\mathcal{BAS}$. Для точки $Q \in \mathbf{Y}$ теоретико-множественное определение прообраза как множества $\varphi^{-1\circ}(Q) := \{P \in \mathbf{X} \mid \varphi(P) = Q\}$ не годится: во-первых, оно не наделяет прообраз структурой объекта $\mathcal{BAS}$, а, во-вторых, вообще не имеет ясного смысла для в случае *не-теоретико-множественных* категорий $\mathcal{BAS}$ – например, категории этальных топологий.

Чтобы исправить положение, надо прежде всего модифицировать понятие *точки объекта* категории $\mathcal{BAS}$. Понятие *абстрактной* точки, spec($\Bbbk$), у нас есть, и остаётся заменить понятие классической точки $Q \in \mathbf{Y}$ на *вложение*

$$\iota_Q : \mathrm{spec}(\Bbbk) \longrightarrow \mathbf{Y} : \{0\} \mapsto Q.$$

(напомним, что как множество $\mathrm{spec}(\Bbbk)$ состоит из единственного элемента – нулевого идеала). Теперь мы готовы определить слой морфизма, то есть прообраз "точки" (который мы временно обозначаем так же, как в теоретико-множественных категориях), как расслоённое произведение

$$\varphi^{-1\circ}(\iota_Q) := \big(\mathrm{spec}(\Bbbk), \iota_Q\big) \times_{\mathbf{Y}} (\mathbf{X}, \varphi) \tag{3.0.1$a$}$$

– в более традиционных обозначениях правую часть следовало бы написать как $\mathrm{spec}(\Bbbk) \times_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$, поскольку морфизмы $\iota_Q$ и $\varphi$ восстанавливаются по контексту.

Определение (3.0.1$a$) автоматически наделяет слои морфизмов структурами объектов $\mathcal{BAS}$.

**3.0.2. Семейства кривых.** Теперь мы сосредоточимся на морфизмах специального вида, которые будем обозначать

$$\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B}$$

(обозначение заимствовано из классической работы [**Kod2005**]) и называть *семействами кривых* над *базой* $\mathbf{B}$. Сами пространства $\mathcal{X}$ будут называться *телами* семейств. *Слои* этих морфизмов будем обозначать для $B \in \mathbf{B}$

$$\varpi^{-1\circ}(B) =: \mathcal{X}_B.$$

На базы $\mathbf{B} \in\in \mathcal{BAS}$ мы не накладываем никаких ограничений, тогда как от слоёв $\mathcal{X}_B$ требуем, чтобы они были *гладкими полными неприводимыми кривыми над* $\Bbbk$ – как и выше, сократим это словосочетание до *кривыми*.

Семейство $\mathbf{B} \times \mathbf{X}$ с проекцией $\varpi : \mathbf{B} \times \mathbf{X} \to \mathbf{B} : (B, P) \mapsto B$ называется *тривиальным*.

Обычно на семейства кривых накладывается требование быть *плоскими*, но наше условие на слои сильнее; в частности, поскольку рассматриваются схемные прообразы, слои *однократны*.

В случае $\Bbbk = \mathbb{C}$ условие на семейства кривых сводится к тому, что в категории *гладких вещественных многообразий* они образуют *локально-тривиальные расслоения*.

Важнейшая конструкция – построение *индуцированного*[1] семейства: по двум объектам $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in\in \mathcal{BAS}$, морфизму $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{BAS}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ и семейству кривых $\varpi' : \mathcal{X}' \to \mathbf{B}'$ строится семейство $\mathcal{X} := \mathbf{B} \times_{\mathbf{B}'} \mathcal{X}'$, в котором проекция $\varpi$ определяется из (входящей в определение расслоённого произведения) диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dl, "\widehat{\alpha}"'] \arrow[dr, "\varpi"] \arrow[dd] & \\ \mathcal{X}' \arrow[dr, "\varpi'"'] & & \mathbf{B} \arrow[dl, "\alpha"] \\ & \mathbf{B}' & \end{tikzcd} .$$

[1] видимо, хорошего русского аналога слова *pullback* не придумано...

Напомним, что[2] $\mathcal{X} = \{(Q', B) \in \mathcal{X}' \times \mathbf{B} \mid \varpi'(Q') = \alpha(B)\}$; индуцированное семейство определяется морфизмом $\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B} : (Q', B) \mapsto B$. Морфизм тел семейств определяется как проекция $\widehat{\alpha} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'(Q', B) \mapsto Q'$. Вертикальная стрелка $\varpi' \circ \alpha = \alpha \circ \varpi$ напоминает о том, что

*в семействе* $\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ *над точкой* $B \in \mathbf{B}$ *висит кривая* $\mathcal{X}'_{\alpha(B)}$.

Переход от исходного штрихованного семейства $\varpi' : \mathcal{X}' \to \mathbf{B}'$ к нештрихованному $\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B} : (Q', B) \mapsto B$ называется *заменой базы.*

Далее для кривой $\mathcal{X}$ рода $g$ через $[\mathcal{X}_B] \in \mathcal{M}_g$ будет обозначаться её класс изоморфности.

Любое семейство $\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ кривых рода $g$ определяет *классифицирующее отображение*

$$\mathrm{class}_{\mathcal{X}} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathcal{M}_g(\Bbbk) : B \mapsto [\mathcal{X}_B],$$

сопоставляющее каждой точке базы класс изоморфности висящей над ней кривой.

Характеристическое отображение тривиального семейства, очевидно, постоянно.

Мы постулируем, что классифицирующие отображения – морфизмы в категории $\mathcal{BAS}$. Это приблизительно равносильно заданию структур на <u>множествах</u> $\mathcal{M}_g$.

**3.0.3. Определение функтора семейств.** Введём понятие, по значимости сравнимое с понятием пространств модулей кривых. Идейно оно знаменует переход от рассмотрения "всех кривых" к рассмотрению "всех семейств кривых". В нашем изложении обсуждаемое понятие содержит некоторую неопределённость, поскольку зависит от выбора категории $\mathcal{BAS}$.

*Функтором семейств кривых* (рода $g$) называется функтор

$$\mathbf{fam}_g : \mathcal{BAS} \longrightarrow\!\!\!\!\longrightarrow \mathcal{SET} : \mathbf{B} \mapsto\!\!\!\mapsto \frac{\{\varpi : \mathcal{X} \to \mathbf{B} \mid ...\}}{\approx},$$

сопоставляющий каждой базе множество классов изоморфности семейств кривых (рода $g$) над ней.

В математике XX века важное место занимали задачи классификации "чего-то переменного" над "чем-то фиксированным" (впрочем, сформулированный выше *принцип относительности Гротендика* позволяет с помощью подходящей интерпретации предлога <u>над</u> сводить абсолютное к относительному).

[2] в теоретико-множественных категориях, которые являются для нас основными

Так, во многих разделах математики и физики фигурируют "все" расслоения с фиксированной базой[3]. На этом пути возникают *классифицирующие пространства*: функторы семейств в других разделах математики оказываются *представимыми* (см., например, [**May1975**]). Над классифицирующими пространствами обнаруживаются *универсальные расслоения*, расслоения над всеми базами оказываются прообразами универсальных и классифицируются гомотопическими классами отображений баз в классифицирующие пространства. Возникают фундаментальные эквивалентности категорий...

Но с нашим всё оказывается сложнее. Если бы существовали *универсальные семейства кривых*, то есть над каждой точкой пространства модулей висела бы соответствующая этой точке кривая, то все семейства кривых тоже описывались бы классифицирующими отображениями. Однако универсальные семейства кривых остаются несбыточной мечтой...

**3.0.3. Непредставимость функтора семейств.** Для разрушения мечты достаточно одного примера.

Рассмотрим при $\Bbbk = \mathbb{C}$ семейство кривых, заданное уравнением

$$y^2 = x^3 - \epsilon; \tag{3.0.3a}$$

подразумевается, что $\epsilon \in \mathbf{B} = \dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а уравнение (3.0.3a) понимается как уравнение слоёв семейства записанное при фиксированном $\epsilon$ в аффинных координатах.

Слои семейства очевидно изоморфны: j-инвариант тождественно равен 0. Семейство, однако, нетривиально; проще всего убедиться в этом, вычислив *монодромию* (преобразование гомологий слоя) при обходе $\epsilon = 0$ (задача **3.5**).

**Важное замечание.** Семейство (3.0.3a) *изотривиально*: оно становится тривиальным при замене базы, позволяющей ввести $\sqrt[6]{\epsilon}$. Точнее, при замене базы $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_1$, имеющей в координатах вид $\epsilon = \delta^6$, уравнение слоя превращается в $y^2 = x^3 - \delta^6$, и замена координат $(x = \delta^2 x_1, y = \delta^3 y_1)$ тривиализует уравнение семейства до постоянного $y_1^2 = x_1^3 - 1$.

Мы убедились в непредставимости функтора $\mathbf{fam}_1$; несложные модификации этого примера убеждают в непредставимости функторов $\mathbf{fam}_g$ и при $g > 1$.

## 3.1. Приближения к представимости функтора семейств

**3.1.0. Модули с дополнительными структурами $\widehat{\mathcal{M}_g}$ и стеки.** От категории кривых можно многими способами "подняться" до категории *пар* $(\mathbf{X}, \mathfrak{s})$, где $\mathfrak{s}$ – какая-то *дополнительная структура*. Не будем уточнять это понятие, а ограничимся приведением примеров, потребовав лишь, чтобы был определён *забывающий функтор*

$$(\mathbf{X}, \mathfrak{s}) \mapsto\!\!\mapsto \mathbf{X},$$

[3] мы немного поговорили об этом в лекции 1, напоминая о линейных расслоениях и группе Пикара – не упоминая, впрочем, интересных и важных категорных конструкций, параллельных тому, что обсуждается сейчас.

переводящий в данную кривую лишь конечное число пар. Для каждой такой структуры определяется пространство *модулей с дополнительными структурами*

$$\widehat{\mathcal{M}_g} := \frac{(\mathbf{X}, \mathfrak{s})}{\approx}$$

и "забывающее" отображение

$$\widehat{\mathcal{M}_g} \longrightarrow \mathcal{M}_g : [(\mathbf{X}, \mathfrak{s})] \mapsto [\mathbf{X}],$$

которое должно переводить в данную кривую не более чем конечное число пар.

Пример встречался нам в предыдущей лекции: кривая $\mathbf{X}$ рода 1 наделялась групповой структурой с нейтральным элементом $\underline{\infty}$; в качестве дополнительной структуры фиксировался изоморфизм

$$\mathfrak{s} : \mathrm{tors}_2(\mathbf{X}) \stackrel{\simeq}{\to} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$$

группы точек второго порядка с фиксированным векторным пространством размерности 2 над полем из двух элементов. Возникающее пространство модулей с дополнительной структурой, называемой *структурой уровня 2,* естественно отождествлялось с дважды проколотой прямой

$$\widehat{\mathcal{M}_1}(\Bbbk) \simeq \ddot{\Bbbk}.$$

Естественно определяемый функтор семейств кривых рода 1 с указанной дополнительной структурой оказывается представимым: все семейства индуцируются с *универсального*

$$y^2 = x(x-1)(x-t).$$

В задаче **3.6** предлагается уточнить детали.

В дальнейшем будут приведены другие примеры. Для любого рода в изобилии существуют пространства модулей вида $\widehat{\mathcal{M}_g}(\Bbbk)$, над каждым из которых имеется универсальная кривая, гарантирующая представимость функтора семейств. Таким образом, непредставимость исходного функтора семейств восстанавливается введением различных дополнительных структур на кривых.

Что касается перехода от пространств модулей $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ к *стекам* $\mathfrak{M}_g(\Bbbk)$, ограничимся беглым и неформальным упоминанием Гротендиковской идеи, в наших обозначениях близкой к рассмотрению "всех" накрытий $\widehat{\mathcal{M}_g} \to \mathcal{M}_g$ ОДНОВРЕМЕННО. Это выводит за пределы теоретико-множественной математики и приводит к *топологиям Гротендика*, существенно усложняя основания, но упрощая некоторые результаты; см. [**Мамфорд1969**].

**3.1.1. Слои семейств вида $\mathbf{X}/\mathrm{Aut}\mathbf{X}$.** Другой компромисс имеет смысл для родов $g \geq 3$, хотя с его идеей мы встречались, обсуждая в прошлой лекции "почти универсальное" семейство

$$y^2 = x^3 - \frac{27}{4}\frac{j}{j-1728}(x+1).$$

Если понимать его как семейство кривых рода 1 с *отмеченной точкой* (см. следующий подраздел) – а это вполне законно, поскольку в каждом слое выделена точка $\underline{\infty}$ – то слои, в которых творится неладное, висят над j=0 и j=1728, то есть соответствуют знаменитым кривым с нетривиальными групповыми автоморфизмами: $(x,y)\mapsto(\sqrt[3]{1}x,y)$ для $y^2=x^3-1$ и $(x,y)\mapsto(-x,\mathrm{i}y)$ для $y^2=x^3-x$. Хотя для того, чтобы получить из этого семейства типа обсуждаемых сейчас семейств со слоями $\frac{\mathbf{X}}{\mathrm{Aut}\mathbf{X}}$, ещё нужно приложить некоторые усилия, пример намекает на такую возможность.

В случае же $g\geq 3$ *общая* кривая не имеет нетривиальных автоморфизмов, см. [**Hurwitz1892**]. Более того, множество

$$\mathbf{\Sigma}_g := \big\{[\mathbf{X}]\in\mathcal{M}_g \mid \mathrm{Aut}\mathbf{X}\neq\{1\}\big\}$$

является алгебраическим подмногообразием положительной коразмерности (при $g\geq 4$ оно совпадает с множеством *особых точек* пространства модулей $\mathcal{M}_g$, см. [**Popp1969**]).

Аналогом обсуждавшейся нами *почти универсальной кривой* является морфизм

$$\mathrm{u}_g:\mathcal{C}_g\longrightarrow\mathcal{M}_g, \tag{$\bigstar$}$$

слои которого имеют вид

$$\mathrm{u}_g^{-1\circ}\big([\mathbf{X}]\big)\cong\frac{\mathbf{X}}{\mathrm{Aut}\mathbf{X}};$$

– см. [**HarMor1998**]. В нашей терминологии ($\bigstar$) является семейством кривых лишь над $\mathcal{M}_g\setminus\mathbf{\Sigma}_g$; впрочем, с ростом $g$ коразмерность множества кривых с нетривиальными автоморфизмами тоже растёт, и во многих геометрических вопросах множеством $\mathbf{\Sigma}_g$ можно пренебречь. Поэтому для больших родов функтор семейств "близок" к представимому.

Конструкция этого подраздела, морфизм ($\bigstar$), легко получается из конструкций предыдущего. Если $\widehat{\mathcal{M}_g}\to\mathcal{M}_g$ *накрытие Галуа*, то есть имеется такая действующая на $\widehat{\mathcal{M}_g}$ конечная группа Γ, что $\mathcal{M}_g\simeq\frac{\widehat{\mathcal{M}_g}}{\Gamma}$, то обычно действие Γ поднимается на универсальное семейство над $\widehat{\mathcal{M}_g}$, и универсальное семейство ($\bigstar$) определяется как фактор по этому действию.

**3.1.2. Пространства модулей $\mathcal{M}_{g,N}$** Наряду с "чистыми" пространствами модулей, которые мы обсуждали до сих пор, важную роль в курсе будут играть пространства модулей кривых *с отмеченными точками.*

В современной литературе, в отличие от основоположников (см. сборник статей [**АльБер1961**]), принято рассматривать нумерованные отмеченные точки. Их количество и в нумерованном, и в ненумерованном варианте обычно обозначают $n$; наша замена этого традиционного обозначения на $N$ имеет серьёзные причины, которые будут объяснены в последующих лекциях. По определению,

$$\mathcal{M}_{g,N} := \frac{\{(\mathbf{X};P_1,\ldots,P_N)\mid[\mathbf{X}]\in\mathcal{M}_g;P_1,\ldots,P_N\in\mathbf{X};(i\neq j)\Rightarrow(P_i\neq P_j)\}}{\approx},$$

где $(\mathbf{X};P_1,\ldots,P_N)\approx(\mathbf{X}';P'_1,\ldots,P'_N)$, если найдётся такой изоморфизм

$$\alpha:\mathbf{X}\xrightarrow{\simeq}\mathbf{X}',\ \text{что}\ \alpha(P_1)=P'_1,\ldots,\alpha(P_N)=P'_N.$$

Категорная часть теории пространств $\mathcal{M}_{g,N}$ отличается от теории $\mathcal{M}_g$ в основном наличием $N$ непересекающихся сечений семейств кривых; мы не будем останавливаться на деталях.

Однако с универсальными семействами и представимостью функтора семейств дела обстоят существенно лучше, поскольку упорядоченные наборы точек убивают автоморфизмы кривых. Надлежащим образом определённые функторы семейств оказываются при достаточно больших $N$ представимы.

Непредставимость функтора семейств привела нас к нескольким вариациям на исходную тему полной классификации кривых; другие нас ещё ждут. Но сейчас мы вернёмся к исходным пространствам модулей малых родов.

### 3.2. Пространство $\mathcal{M}_2$

**3.2.0. Гиперэллиптическая модель.** В конце прошлой лекции мы (почти) установили, что любая кривая рода 2 имеет аффинную модель вида

$$v^2 = F \in \Bbbk[u]_6, \tag{3.2.0$a$}$$

где многочлен $F$ в правой части не имеет кратных корней.

Корни многочлена $F$ – неупорядоченная шестёрка точек на $\mathbf{P}_1(\Bbbk)$, определённая с точностью до общего дробно-линейного преобразования. Иначе говоря, пара координат $(u, v)$ в уравнении (3.2.0a) определена с точностью до замен

$$u = \frac{au' + b}{cu' + d},\ v = \frac{v'}{(cu' + d)^3},$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SL}_2(\Bbbk)$.

Поскольку кривая рода 2 однозначно определяется уравнением (3.2.0a), описание пространства $\mathcal{M}_2(\Bbbk)$ превращается в типичную задачу классической теории инвариантов, которую мы сформулируем в аффинной версии: *профакторизовать пространство многочленов* $\Bbbk[u]_{\leq 6}$ *по действию группы* $\mathsf{SL}_2(\Bbbk)$

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot F \right)(u) := (cu + d)^6 F\Big(\frac{au + b}{cu + d}\Big). \tag{3.2.0$b$}$$

Как уже говорилось в предыдущей лекции, решение этой задачи даёт представление пространства модулей в виде

$$\mathcal{M}_2(\Bbbk) \simeq \frac{\Bbbk[u]_{\leq 6} \setminus \mathbf{Mult}}{\mathsf{SL}_2(\Bbbk)}, \tag{3.2.0$c$}$$

где $\mathbf{Mult}$ – множество многочленов с кратными корнями; следует учесть, что недостающими корнями многочленов степени, меньшей 6, следует считать точку $\underline{\infty} \in \mathbf{P}_1(\Bbbk)$ с подходящими кратностями.

Задача описания фактора (3.2.0c) была полностью решена в XIX веке: см.

[**Bol1887**], [**Cay1881**], [**Cle1872**]. Будем следовать модернизации п [**Igusa1960**] – полученные в этой работе формулы удивительным образом работают во всех характеристиках.

В классической нормировке

$$F = au^6 + 6bu^5 + 15cu^4 + 20du^3 + 15eu^2 + 6fu + g \equiv:$$

$$\equiv: a(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)(u-u_5)(u-u_6).$$

Введём обозначение

$$\langle ij \rangle := u_i - u_j,$$

и для каждого монома $\langle i_1 j_1 \rangle \dots \langle i_m j_m \rangle$ определим многочлен

$$\sum\sum \langle i_1 j_1 \rangle^2 \dots \langle i_m j_m \rangle^2 := \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_m;\tau_1,\dots,\tau_m \in \mathfrak{S} \subseteq \mathsf{S}_6^{2m}} \langle i_1 j_1 \rangle^2 \dots \langle i_m j_m \rangle^2,$$

где выбрано минимальное множество $\mathfrak{S}$ наборов перестановок, при котором определяемая им сумма $\mathsf{S}_6$-инвариантна, то есть является симметрической функцией от корней $u_1, \dots, u_6$.

Вводятся инварианты

$$A := a^2 \sum\sum \langle 12 \rangle^2 \langle 34 \rangle^2 \langle 56 \rangle^2,$$

$$B := a^4 \sum\sum \langle 12 \rangle^2 \langle 23 \rangle^2 \langle 31 \rangle^2 \langle 45 \rangle^2 \langle 56 \rangle^2 \langle 64 \rangle^2,$$

$$C := a^6 \sum\sum \langle 12 \rangle^2 \langle 23 \rangle^2 \langle 31 \rangle^2 \langle 45 \rangle^2 \langle 56 \rangle^2 \langle 64 \rangle^2 \langle 14 \rangle^2 \langle 25 \rangle^2 \langle 36 \rangle^2,$$

$$D := a^{10} \prod_{i,j} \langle ij \rangle^2 \text{ (это просто дискриминант многочлена } F\text{)}$$

$$E := a^{15} \prod\prod \big( \langle 14 \rangle \langle 36 \rangle \langle 52 \rangle - \langle 16 \rangle \langle 32 \rangle \langle 54 \rangle \big)$$

(в последнем выражении для произведений понимается то же соглашение, что для сумм).

Оказывается, *многочлены* $A, B, C, D, E$ *порождают алгебру* $\mathsf{SL}_2(\Bbbk)$-*инвариантов алгебры* $\Bbbk[a, b, \dots, g]$!

Младшие из них не так уж страшны:

$$A = -240(ag - 6bf + 15ce - 10d^2),$$

$$B = -162000 \det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{pmatrix} + 1620(ag - 6bf + 15ce - 10d^2)^2.$$

Они связаны соотношением

$$E^2 = G(A, B, C, D),$$

где $G$ – некоторый взвешенно-однородный многочлен степени 30, см. [**Cle1872**].

***

Чтобы считать описание пространства модулей законченным, нам ещё надо перейти от аффинных моделей кривых рода 2 к *полным.* В случае рода 1 достаточно было вложить стандартным образом аффинную плоскость в проективную и замкнуть кривую там. Кривая же (3.2.0$a$) при такой операции приобретёт неприятную особенность.

Мы пойдём другим путём. Выберем уравнение (пользуясь преобразованиями координаты $u$) аффинной кривой в некотором удобном виде, а самой кривой дадим имя, смысл которого вскоре прояснится –

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 : v^2 = u^6 + m_5 u^5 + m_4 u^4 + m_3 u^3 + m_2 u^2 + m_1 u + 1 \tag{3.2.0$d$}$$

С помощью замен координат

$$u = \frac{1}{U}, v = \frac{V}{U^3} \tag{3.2.0$e$}$$

строится *бирационально эквивалентная* исходной кривая

$$\ddot{\mathbf{X}}_\infty : V^2 = U^6 + m_1 U^5 + m_2 U^4 + m_3 U^3 + m_4 U^2 + m_5 U + 1 \tag{3.2.0$f$}$$

(последовательности коэффициентов отражаются). Нетрудно убедиться, что соответствие (3.2.0$e$) определяет полную кривую

$$\mathbf{X} = \ddot{\mathbf{X}}_0 \bigcup \ddot{\mathbf{X}}_\infty,$$

представленную в виде объединения двух гладких аффинных. Аффинные (*карты*) оказываются *дважды проколотыми*полными кривыми, откуда и обозначение. Детали предлагается проверить в задаче **3.7.**

***

Имея в распоряжении полную кривую $\mathbf{X}$ рода 2, можно немного поработать с её геометрией.

Мы начинали с двулистного накрытия

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{P}_1,$$

однозначно определённого с точностью до дробно-линейной посткомпозиции (которая возникает при смене базиса в пространстве $\Omega^1[\mathbf{X}]$). Это накрытие является факторизацией по инвариантно определённой *гиперэллиптической инволюции*, которая в используемых нами координатах имеет вид $(u, v) \mapsto (u, -v)$.

У этой инволюции ровно 6 неподвижных точек, которые называются *точками Вейерштрасса.* Другие их инвариантные характеристики:

• критические точки функции $\frac{\omega_1}{\omega_2}$;
• точки $P \in \mathbf{X}$, в которых $\ell(2P) = 2$.

Неинвариантное определение точек Вейерштрасса в модели $v^2 = F$: это точки, *абсциссы* которых – корни многочлена $v^2 = F$; если $\deg F = 5$, точкой Вейерштрасса является (единственная) точка с бесконечной абсциссой. равносильным образом, точки Вейерштрасса – точки с нулевой *ординатой*, решения уравнения $v = 0$.

***

Точки Вейерштрасса позволяют определить для рода два своеобразное 720-листное накрытие

$$\widehat{\mathcal{M}_2} \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

(выше мы обещали ещё примеры). Теперь дополнительная структура будет *нумерация точек Вейерштрасса.* Если такая нумерация фиксирована, то с помощью единственного дробно-линейного преобразования мы можем отправить первые три в $\infty, 0, 1$. Это даст <u>каноническое</u> уравнение кривой рода 2, зависящее от трёх параметров:

$$\boxed{y^2 = x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)}$$

Пространство $\widehat{\mathcal{M}_2}$ оказывается неправдоподобно просто устроено! Оно представляет собой 3-мерное аффинное пространство, из которого выброшена небольшая конфигурация плоскостей:

$$\widehat{\mathcal{M}_2} \cong \{(t_1, t_2, t_3) \in \ddot{\Bbbk} \times \ddot{\Bbbk} \times \ddot{\Bbbk} \mid t_i \neq t_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Производит впечатление контраст простоты этой параметризации пространства $\widehat{\mathcal{M}_2}$ по сравнению с невероятно сложной параметризацией исходного пространства модулей $\mathcal{M}_2$, потребовавшей более сотни лет напряжённой работы. Интересна также параллель с одним из пространств $\widehat{\mathcal{M}_1} \cong \ddot{\Bbbk}$; впрочем, продолжение этой параллели на высшие роды, видимо, неизвестно.

**3.2.1. Пространственные квинтики.** Будем действовать по аналогии с родом 1, используя пространства Римана-Роха $\mathrm{L}(nP)$.

Одно важное различие: на кривой рода 1 точки неразличимы, и мы начинали с произвольной. Почти также мы поступим и сейчас, но всё же у нас появился новый вопрос: работать с точкой Вейерштрасса или нет?

Для наших текущих целей ответ – ”нет”.

Итак, пусть $\mathbf{X}$ – кривая рода 2, $P \in \mathbf{X}$ – <u>не</u> точка Вейерштрасса. Это означает, что

$$\begin{gathered} \ell(P) = 1; \\ \ell(2P) = 1; \\ \ell(3P) = 2; \\ \ell(4P) = 3; \\ \dots \end{gathered}$$

Выберем

$$x \in \mathrm{L}(3P) \setminus \Bbbk, y \in \mathrm{L}(4P) \setminus \mathrm{L}(3P), z \in \mathrm{L}(5P) \setminus \mathrm{L}(4P).$$

**Теорема.** *Отображение*

$$(1 : x : y : z) : \mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_3$$

*вкладывает кривую* $\mathbf{X}$ *в трёхмерное проективное пространство в качестве кривой степени 5.*

**Набросок доказательства.** Воспользуемся аффинной моделью кривой
$$v^2 = 1 + pu^2 + qu^3 + ru^4 + su^5 - u^6$$
и предположим, что
$$u(P) = 1, v(p) = 1.$$
Тогда сформулированным условиям удовлетворяют функции
$$x = \frac{v + 1 + \frac{1}{2}pu^2}{u^3},\ y = \frac{v + 1 + \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{2}qu^3}{u^4},$$
$$z = \frac{v + 1 + \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{2}qu^3 + \left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{8}p^2\right)u^4}{u^5}.$$
Прямые вычисления показывают, что эти функции удовлетворяют квадратичному уравнению
$$y^2 - xz - \frac{q}{2}z + \left(\frac{r}{2} - \frac{p^2}{8}\right)y = 0$$
и кубическому
$$x^3 - 2yz - pxy + \frac{q}{2}x^2 - sy + x + \frac{q}{2} = 0.$$
Следовательно, образ кривой $\mathbf{X}$ лежит на пересечении квадрики и кубики. Но, если бы его степень равнялась 6, то род был бы 4; остаётся возможность квадрике и кубике содержать общую прямую, и тогда образ кривой $\mathbf{X}$ – квинтика. ■

Скромное достижение заключается в том, что мы реализовали произвольную кривую рода 2 как гладкую проективную кривую. К явному описанию пространства $\mathcal{M}_2$ вряд ли что-то добавляет, но один принципиально важный вывод позволяет сделать: *пространство* $\mathcal{M}_2$ *естественно примыкает к границе пространства* $\mathcal{M}_4$.

Такие взаимоотношения между пространствами модулей разных родов весьма типичны.

**3.2.2. Особые квартики.** Гладкие плоские кривые степени $d$ имеют род
$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \qquad (\bigstar)$$
Квадратичная функция в правой части не принимает (при натуральных $d$) значения 2, поэтому кривые рода 2 не реализуются как гладкие плоские.

Гладкие квартики, как видно из формулы ($\bigstar$), имеют род 3. В дальнейшем мы обсудим – и наглядно, и строго,– почему появление простейшей особенности снижает род кривой на 1. Из этого неформального рассуждения сразу следует, что плоские квартики умеют вырождаться в кривые рода 2.

Вывод похож на вывод предыдущего подраздела: *пространство* $\mathcal{M}_2$ *естественно примыкает к границе пространства* $\mathcal{M}_3$.

Плоские кривые с простейшими особенностями – очень важный раздел алгебраической геометрии (хотя бы потому, что все кривые могут быть так реализованы). История алгебро-геометрического понимания пространств модулей кривых была тесно связана с этим классом кривых.

## 3.3.Пространство $\mathcal{M}_3$

**3.3.0. Плоские квартики.** То, что эти кривые в случае гладкости – то есть при *общих* коэффициентах имеют род 3, мы только что упомянули. Их геометрия весьма богата – например, во вполне современной книге [**Dol2012**] им освящено более полусотни страниц. Поэтому не будем пытаться бегло рассказать об этой геометрии.

Классификация плоских квартик с точностью до проективной эквивалентности – классическая задача теории инвариантов, соседняя с теми, которые мы немного затронули. Её связь с пространствами модулей нам ещё предстоит обсудить.

**3.3.1. Гиперэллиптические кривые рода 3.** Кривая $\mathbf{X}$, обладающая аффинной моделью

$$v^2 = F \in \Bbbk[u]_{2g+2},$$

пополняется тем же методом, что был достаточно подробно обсуждён при $g = 2$; аффинная кривая оказывается дважды проколотой полной кривой рода $g$ с базисом дифференциалов

$$\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \frac{\mathrm{d}u}{v}, \frac{u\mathrm{d}u}{v}, \dots, \frac{u^{g-1}\mathrm{d}u}{v} \rangle.$$

Случай $g = 3$ ничем специальным не выделяется. Размерность пространства гиперэллиптических кривых рода 3 равна

$$\dim(\mathbf{P}\Bbbk[u]_8) - \dim(\mathsf{SL}_2(\Bbbk)) = 8 - 3 = 5.$$

**3.3.2.** $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3^{\mathsf{can}} \coprod \mathcal{M}_3^{\mathsf{hyp}}$**.** В случае рода 3 впервые встречается явление, несколько затрудняющее изучение пространства модулей: кривые оказываются *качественно разными*.

Дифференциалов уже достаточно много, чтобы они играли главенствующую роль. Пусть $\mathbf{X}$ – произвольная кривая рода 3; выберем базис

$$\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$$

и рассмотрим *каноническое отображение*[4]

$$\iota_{\mathsf{K}} = (\omega_1 : \omega_2 : \omega_3) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{P}_2.$$

Оказывается, есть ровно две возможности.

(а) $\iota_{\mathsf{K}}$ – вложение, и $\iota_{\mathsf{K}}(\mathbf{X})$ – квартика;
(б) $\iota_{\mathsf{K}}$ отображение "два к одному", и $\mathbf{X}$ – гиперэллиптическая кривая.

Таким образом, все кривые рода 3 расклассифицированы.

[4] наше обозначение не является общепринятым

Размерность семейства квартик равна
$$\dim\left(\mathbf{P}\Bbbk[x:y:z]_4\right) - \dim(\mathsf{PGL}_3) = 14 - 8 = 6.$$
Итак, *общая кривая рода 3 – квартика.* Пространство модулей распалось на непересекающиеся разноразмерные части
$$\boxed{\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3^{\mathsf{can}} \coprod \mathcal{M}_3^{\mathsf{hyp}}}$$
Мы познакомились с методами описания каждой из частей. Их соединение потребует новых соображений.

## Список литературы


**[Bol1887]** O. Bolza, *On binary sextics with linear transformations into themselves.* Amer. J. Math. 10 (1887), 47-70.

**[Cay1881]** A. Cayley, *Tables for the binary sextic.* Amer. J. Math. 4 (1881), pp. 372-376.

**[Cle1872]** A. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen.* Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1872.

**[Dol2012]** Igor V. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern View.* Cambridge University Press, 2012.

**[EisHar1998]** David Eisenbud and Joe Harris, *The Geometry of Schemes.* Springer-Verlag, 1998.

**[GroDie1960]** A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique.* Publ. Math. IHÉS 4 (Chapter 0, 1–7, and I, 1–10), 8 (II, 1–8), 11 (Chapter 0, 8–13, and III, 1–5), 17 (III, 6–7), 20 (Chapter 0, 14–23, and IV, 1), 24 (IV, 2–7), 28 (IV, 8–15), and 32 (IV, 16–21), 1960–1967.

**[HarMor1998]** Joe Harris and Ian Morrison, *Moduli of Curves.* Springer, 1998.

**[Hurwitz1892]** A. Hurwitz, *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.* Math. Ann. 41 (1892), no. 3, 403–442.

**[Igusa1960]** J. Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two.* Ann. of Math. (2) 72 (1960) 612–649.

**[Kod2005]** K. Kodaira, *Complex Manifolds and deformation of Complex Structures.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Book 283), Springer, 1986.

**[May1975]** J. Peter May, *Classifying spaces and fibrations.* Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975), no. 1, 155.

**[Popp1969]** Herbert Popp, *The Singularities of the Moduli Schemes of Curves.* Journal of number theory 1, 90-107 (1969).

**[АльБер1961]** Ларс Альфорс, Липман Берс, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения.* М., ИЛ, 1961.

**[Маклейн2004]** С. Маклейн, *Категории для работающего математика.* М., ФИЗМАТЛИТ, 2004.

**[Мамфорд1969]** Д. Мамфорд, *Проблемы модулей и их группы Пикара.* . Математика, 1969, том 13, выпуск 2, 26–63.

**[Манин2012]** Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы.* МЦНМО, 2012.

**[Милн2000]** Дж. Милн, *Этальные когомологии.* ИО НФМИ, 2000.

**[Шафаревич2007]** И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* МЦНМО, 2007.