Независимый Московский Университет, осень 2020

Г.Б. Шабат,

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ-2

Лекция 4 (1 октября 2020)
Пространства модулей кривых (завершение обзора)

В этой лекции мы завершаем рассмотрение алгебро-геометрической теории пространств модулей кривых. Ввиду обширности материала мы приводим мало доказательств, но даём довольно много ссылок на оригинальные и современне работы.

4.0. Размерность

4.0.0. Разобранные случаи. Мы построили несколько пространств модулей кривых малых родов. Соберём полученные результаты в таблицу, указывая (не упоминаемые раньше) размерности.

g	Реализация $\mathcal{M}_g^{\mathsf{can}}$	$\dim \mathcal{M}_g$
0	$*$	0
1	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[x{:}y{:}z]_3}{\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)}$	$9-8=1$
2	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[u_0{:}u_1]_6}{\mathsf{PSL}_2(\Bbbk)}$	$6-3=3$
3	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[x{:}y{:}z]_4}{\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)}$	$14-8=6$

Видно, что размерности довольно регулярно возрастают вместе с родом. Разберём ещё один пример.

4.0.1. Пространство $\mathcal{M}_4^{\mathsf{can}}$. Пусть $\mathbf{X}$ – произвольная каноническая кривая рода 4. Выберем базис в пространстве дифференциалов

$$\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \rangle$$

и рассмотрим соответствующее каноническое вложение

$$\iota_{\mathsf{K}} = (\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4) : \mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_3.$$

Перейдём к *квадратичным дифференциалам*. Начав с попарных произведений базисных, посчитаем их количество

$$\#\{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \ldots, \omega_4^2\} = 10.$$

Следующий вопрос: а какова размерность пространства $\mathrm{L}(2\mathsf{K})$, в котором эти квадратичные дифференциалы живут?

Ответ даёт RR: поскольку $\deg(2\mathsf{K}) = 2\deg(\mathsf{K}) = 2\cdot(2\cdot 4 - 2) = 12$, имеем

$$\ell(2\mathsf{K}) = \deg(2\mathsf{K}) - 4 + 1 = 12 - 3 = 9,$$

так что

$$\iota_{\mathsf{K}}(\mathbf{X}) \textit{ лежит на квадрике } Q \subset \mathbf{P}_3.$$

Но $\iota_{\mathsf{K}}(\mathbf{X})$ не может лежать на двух разных квадриках, поскольку иначе она содержала бы эллиптическую или рациональную кривую, Следовательно,

$$\iota_{\mathsf{K}}(\mathbf{X}) \textit{ лежит на единственной квадрике } Q \subset \mathbf{P}_3.$$

Займёмся теперь *кубическими дифференциалами*. Начав с произведений по трое базисных, посчитаем их количество

$$\#\{\omega_1^3, \omega_1^2\omega_2, \ldots, \omega_4^3\} = 20$$

и снова поставим вопрос о размерности пространства $\mathrm{L}(3\mathsf{K})$, в котором эти кубические дифференциалы живут.

Ответ снова даёт RR: поскольку $\deg(3\mathsf{K}) = 3\deg(\mathsf{K}) = 3\cdot(2\cdot 4 - 2) = 18$, имеем

$$\ell(3\mathsf{K}) = \deg(3\mathsf{K}) - 4 + 1 = 18 - 3 = 15,$$

так что

имеется 5-мерное пространство кубик $C \subset \mathbf{P}_3$, содержащих $\iota_{\mathsf{K}}(\mathbf{X})$.

Теперь рассмотрим (эвристически...) отображение

$$\{\text{квадрики}\} \times \{\text{кубики}\} \longrightarrow \{\text{кривые степени } 6\} : (Q, C) \mapsto Q \bigcap C.$$

У него (9+19=28)-мерная область определения и, как мы видели, за счёт кубик 4-мерные (учтём *проективность* рассматриваемых объектов) слои, так что пространственные секстики образуют (28-4=24)-мерное семейство. Отфакторизовав это семейство по 15-мерной группе $\mathsf{PGL}_4(\Bbbk)$, придём к выводу

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_4 = 9}$$

Проведённые прикидки можно сделать строгими, если несколько раз придать смысл словам *в общем положении*, подсчитать размерность пространства модулей *гиперэллиптических* кривых рода 4 (она окажется равной $2\cdot 4 - 1 = 7$) и придти к выводу о том, что *канонические кривые составляют плотное по Зарискому множество* в пространстве модулей кривых рода 4.

Более детальные рассуждения можно найти, например, в [**Kempf1986**].

Мы можем добавить строчку к таблице, приведённой в начале подраздела:

g	Реализация $\mathcal{M}_g^{\mathsf{can}}$	$\dim \mathcal{M}_g$
0	$*$	0
1	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[x:y:z]_3}{\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)}$	1
2	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[u_0:u_1]_6}{\mathsf{PSL}_2(\Bbbk)}$	3
3	$\frac{\mathbf{P}\Bbbk[x:y:z]_4}{\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)}$	6
4	$\frac{\Bbbk[t:x:y:z]_2 \times \frac{\Bbbk[t:x:y:z]_3}{\mathbf{V}_5(\mathbf{X})}}{\mathsf{GL}_4(\Bbbk)}$	9

Здесь рекомендуется выполнить упражнение **4.1.**

4.0.2. Непрерывные группы автоморфизмов. Введём временное обозначение

$$\mathbf{X}_g \text{ –"общая" кривая рода } g.$$

Тогда $\mathrm{Aut}(\mathbf{X}_0) \simeq \mathsf{PSL}_2$ (это – группа *дробно-линейных преобразований проективной прямой*), так что

$$\dim \mathrm{Aut}(\mathbf{X}_0) = 3. \tag{4.0.2a}$$

Кривая рода 1 – группа, действующая сама на себе сдвигами, поэтому

$$\dim \mathrm{Aut}(\mathbf{X}_1) = 1. \tag{4.0.2b}$$

Наконец, при $g \geq$ кривая рода g имеет не более чем конечную группу автоморфизмов (точнее, порядка, не превосходящего $84(g-1)$ см. [**Hurwitz1893**]), откуда

$$\dim \mathrm{Aut}(\mathbf{X}_{\geq 2}) = 0. \tag{4.0.2c}$$

Дополним таблицу уже известных размерностей пространств модулей:

g	$\dim \mathcal{M}_g$	$\dim \mathrm{Aut}(\mathbf{X}_g)$
0	0	3
1	1	1
2	3	0
3	6	0
4	9	0

Это позволяет ввести для $g \in \mathbb{N}$ (нестандартное) обозначение

$$\underline{3g-3} := \begin{cases} 0 \text{ при } g = 0; \\ 1 \text{ при } g = 1; \\ 3g-3 \text{ при } g > 1. \end{cases}$$

и предположить, что

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_g = \underline{3g-3}} \tag{4.0.2d}$$

для всех родов g. Это предположение, допускающее альтернативную формулировку

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3 + \dim \mathrm{Aut}(\mathbf{X}_g) \tag{4.0.2d$'$}$$

верно и вскоре будет обосновано.

4.1. Касательное и кокасательное расслоения

Строго говоря, эти расслоения определены только над *гладкими* точками пространств $\mathcal{M}_g$. Мы, однако, знаем о существовании пространств кривых с *level structure*[1], для пространств модулей которых введено общее обозначение

$$\widehat{\mathcal{M}_g} \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

Среди этих пространств есть гладкие, и для их точек $[\mathbf{X}, \iota]$, где ι пробегает некоторое конечное множество (например, $\iota \in \mathrm{Isom}\Big(\mathrm{H}_1(\mathbf{X}, A), A^{2g}\Big)$, где A – какая-нибудь конечная абелева группа) касательные пространства

$$\mathrm{T}_{[\mathbf{X},\iota]}\widehat{\mathcal{M}_g}$$

могут быть определены, и вскоре окажется, что эти пространства "не зависят" ни от выбора ι, ни от выбора level structure, а зависят только от $[\mathbf{X}]$. Поэтому корректно любое из этих канонически изоморфных линейных пространств объявить касательным

$$\mathrm{T}_{[\mathbf{X}]}\mathcal{M}_g.$$

Обоснование этой конструкции в рамках понятий современной математики принято проводить на языке *орбиобразий*, см. [**Satake1956**], [**AdLeRu2007**].

Для освоения этих понятий рекомендуется выполнить упражнение **4.2**.

4.1.0. Линеаризация семейств кривых. Рассмотрим морфизм гладких алгебраических многообразий

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \Big\downarrow \varpi \\ \mathbf{B} \ni O \end{array} \qquad (4.1.0a)$$

в котором необычная буква ϖ (*альтернативное* "пи") заимствована из классической работы [**Kod2005**], на которую будем ссылаться. База $\mathbf{B}$ всегда будет предполагаться *связной*. Обозначим для $B \in \mathbf{B}$ *слои* морфизма ϖ через

$$\mathcal{X}_B := \varpi^{-1\circ}(B)$$

и будем (обычно при $B \neq O$) называть их *деформациями* слоя $\mathcal{X}_O$.

С пространствами модулей кривых связаны семейства (4.1.0a), относительно которых предполагается, что *все его слои – гладкие полные кривые*.

Для любой точки $P \in \mathcal{X}_O$ определён морфизм касательных пространств

$$\varpi_{*,P} : \mathrm{T}_P\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{T}_O\mathbf{B},$$

ядро которого, очевидно, равно

$$\ker \varpi_{*,P} = \mathrm{T}_P\mathcal{X}_O.$$

[1] Общепринятого перевода этого выражения на русский, кажется, не существует.

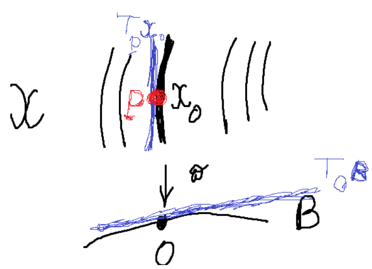
Эти пространства и морфизмы, собранные вместе по всем точкам $P \in \mathcal{X}_O$, соединяются в точную последовательность расслоений над $\mathcal{X}_0$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathcal{X}_O \longrightarrow \mathrm{T}\mathcal{X} \longrightarrow \frac{\mathrm{T}\mathcal{X}}{\mathrm{T}\mathcal{X}_O} \longrightarrow 0,$$

причём очевидны изоморфизмы $\frac{\mathrm{T}\mathcal{X}}{\mathrm{T}\mathcal{X}_O} \cong \mathrm{T}_O\mathbf{B}$. Получаем точную последовательность

$$\boxed{0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathcal{X}_O \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{T}\mathcal{X} \xrightarrow{\varpi_*} \mathrm{T}_O\mathbf{B} \longrightarrow 0} \qquad (\bigstar)$$

в которой использовано обозначение $\iota : \mathcal{X}_O \hookrightarrow \mathcal{X}$ для вложения слоя в семейство.



4.1.1. Отображение Кодаиры-Спенсера. Приведём набросок этой конструкции для произвольного семейства (4.1.0a) *комплексных* компактных (в классической топологии) многообразий: предположение о том, что слои этого семейства – кривые, не вносит упрощений.

Главное отличие комплексно аналитического случая от алгебраического заключается в том, что все гладкие многообразия *локально изоморфны*. В частности, локально изоморфны *слои* семейства (4.1.0a). Это позволяет (возможно, при уменьшении базы до достаточно малой окрестности точки O – все наши конструкции *локальны по базе*) выбрать ДВА[2] покрытия

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i, \qquad (4.1.1a)$$

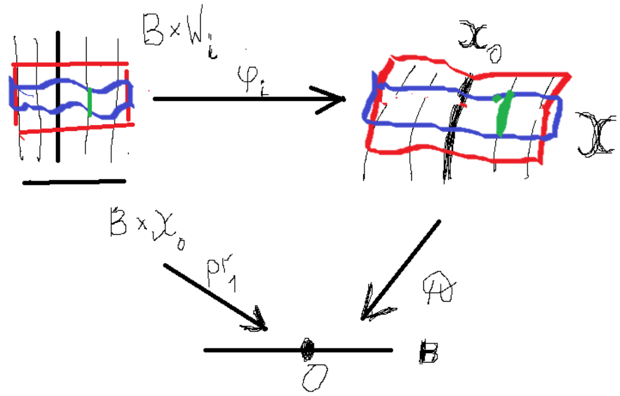
из которых одно *компактно вписано* в другое[3], вместе с *тривиализующими* комплексно-аналитическими изоморфизмами

$$\varphi_i : \mathbf{B} \times W_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{W}_i$$

в которых используется обозначение $W_i = \mathcal{W}_i \bigcap \mathcal{X}_O$.

[2] здесь используется технический приём комплексного анализа, не имеющий алгеброгеометрического аналога

[3] это записывается в виде $\forall i \in I[\mathcal{V}_i \subset\subset \mathcal{W}_i]$ и означает, что *замыкания* меньших множеств содержатся в бо́льших



Эти изоморфизмы определяют системы отображений[4]

$$f_{ij} : \mathbf{B} \times V_{ij} \to W_{ij},$$

которые мы будем интерпретировать как зависящие от $B \in \mathbf{B}$ отображения

$$f_{ij,B} : V_{ij} \to W_{ij}, \tag{4.1.1b}$$

связанными с изоморфизмами φ_i равенствами

$$\varphi_i(B,P) = \varphi_j\big(B, f_{ij,B}(P)\big), \tag{4.1.1c}$$

имеющими смысл на прообразах пересечений

$$(B,P) \in \varphi_i^{-1\circ}(\mathcal{W}_{\rangle|}).$$

Изоморфизмы φ_i задают фрагменты *"связности"* в рассматриваемом семействе кривых (которое при применении функтора, забывающего комплексную структуру и помнящего только гладкую, можно, согласно классической теореме [**Ehresmann1950**], считать расслоением со структурной группой $\mathrm{Diff}(\mathbb{X}_O)$), поскольку они биголоморфно отождествляют куски слоёв. Отображение Кодаиры-Спенсера, которое мы сейчас определим, является инфинитезимальным препятствием к склеиванию имеющихся фрагментов в глобальное отождествление слоёв, которое возможно лишь при *тривиальных* с комплексно-аналитической точки зрения деформациях.

Лемма. *Система функций $\{f_{ij}\}$ обладает следующими свойствами:*
(a) $f_{ij,O} : V_{ij} \hookrightarrow W_{ij}$ (это – просто вложения).
В оставшихся формулах опускаем зависимость от $B \in \mathbf{B}$
(б) $f_{ii} : V_i \hookrightarrow W_i$.
(в) $f_{ij} \circ f_{ji} = \mathrm{id}_{V_{ij}}$.
(г) $f_{ij} \circ f_{jk} \circ f_{ki} = \mathrm{id}_{V_{ijk}}$.

Доказательство. Это – теоретико-множественные соотношения, вытекающие из (4.1.1c)$\blacksquare$.

Замечание. Утверждения леммы выглядят как условие коцикла, но обычной когомологической интерпретации, видимо, не допускают – по крайней мере,

[4]мы пользуемся обычными обозначениями $U_{ij} := U_i \bigcap U_j$, как правило, предполагая эти пересечения непустыми

если не развивать теорию *псевдогрупп*, чего мы делать не собираемся. Однако когомологии появляются при переходе от малых деформаций к инфинитезимальным.

Теорема-определение. *Для любого касательного вектора* $\partial \in \mathrm{T}_O\mathbf{B}$ *сопоставление*

$$(i,j) \mapsto \partial\big|_O \cdot f_{ij}$$

определяет коцикл из $\mathrm{Z}^1(\mathcal{X}_O, \mathcal{T})$, *где* $\mathcal{T}$ *пучок ростков сечений касательного расслоения (то есть векторных полей). Когомологический класс этого коцикла определяет* *<u>отображение Кодаиры-Спенсера</u>*

$$\kappa\mathfrak{s}_{\mathcal{X}} : \mathrm{T}_O\mathbf{B} \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{X}_O, \mathcal{T}).$$

При некоторых дополнительных условиях (выполненных в случае семейств кривых) это отображение является нулевым тогда и только тогда, когда все слои семейства $\mathcal{X}$ *изоморфны.*

О доказательстве. Утверждение относительно коцикла вытекает из леммы. О других утверждениях см. основоположную работу [**Kod2005**] или современное изложение в [**Balaji2010**]. ■

Независимость отображения $\kappa\mathfrak{s}$ от произволов, входящих в его определение, предлагается установить в задаче **4.3**. Применить приведённую трансцендентную конструкцию к вычислению конкретного отображения Кодаиры-Спенсера предлагается в задаче **4.4**.

Хотя мы пользовались трансцендентными средствами, а приведённую конструкцию отображения $\kappa\mathfrak{s}$ невозможно провести в алгебро-геометрическом контексте, само понятие имеет смысл в топологии Зариского. Упомянем альтернативное определение отображения $\kappa\mathfrak{s}$, пригодное в обоих контекстах. Для этого вернёмся к точной последовательности расслоений (★) из конца предыдущего подраздела, но заменим векторные расслоения *пучками их сечений*

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{X}_O} \xrightarrow{\iota_*} \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\big|_{\mathcal{X}_O} \xrightarrow{\varpi_*} \mathrm{T}_O\mathbf{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}_O} \longrightarrow 0 \qquad (\bigstar')$$

Фрагмент соответствующей *точной когомологической последовательности*

$$\longrightarrow \mathrm{T}_O\mathbf{B} \xrightarrow{\kappa\mathfrak{s}} \mathrm{H}^1(\mathcal{X}_O, \mathcal{T}) \longrightarrow \ldots$$

и даёт отображение Кодаиры-Спенсера. Примеры, позволяющие освоить эту конструкцию, предлагаются в задачах **4.5-4.7**.

Совпадение результатов, получаемых алгебраическими и трансцендентными методами, может показаться удивительным. На самом деле это – проявление общего принципа, сформулированного в известной работе [**Serre1956**] и закрепившегося в профессиональном сообществе вместе с аббревиатурой GAGA (*Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*), построенной по названию этой работы.

Принцип GAGA позволяет иногда при работе с алгебраическими многообразиями над полем комплексных чисел не уточнять, какая из двух топологий (Зариского или классическая) имеется в виду, когда произносятся слова *канонический класс, пространство Кодаиры-Спенсера* и т. п.

4.1.2. Касательное расслоение к пространству модулей. Хотя *универсальное семейство кривых над пространством модулей* вместе с *представимостью функтора семейств* (кривых данного рода) – несбыточные мечты, они реализуются при переходе к накрытиям $\widehat{\mathcal{M}_g}$. Поскольку мы сейчас обсуждаем вопросы локальные, можно считать мечты сбывшимися и рассмотреть универсальное семейство

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{g,1} \arrow[d, "\varpi_g"] \\ \mathcal{M}_g \end{tikzcd}$$

со слоем $\mathbf{X}$ над точкой $[\mathbf{X}] \in \mathcal{M}_g$. Тогда отрезок точной когомологической последовательности, в который входит отображений Кодаиры-Спенсера –

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{T}_{[\mathbf{X}]}\mathcal{M}_g \xrightarrow{\kappa s} \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}) \longrightarrow \dots$$

Теорема. *Это отображение – изоморфизм.*
Доказательство. См. [**Sernesi2006**]. ■

4.1.3. Двойственность Серра и её применение. К сожалению, в нашем курсе, как и во всей мировой литературе, не фиксирован выбор между аддитивной и мультипликативной записями операций над линейными расслоениями и соответсвующими им пучками. Так, пучок сечений касательного расслоения (то есть *векторных полей*) мы только что обозначали $\mathcal{T}$; однако в современной алгебраической геометрии, как этит ни парадоксально, первичными объектами являются не касательные, а *ко*касательные расслоения и пучки, и с ними связываются слова *канонический класс* и обозначения K или $\mathsf{K}_{\mathbf{X}}$.

В общей формулировке двойственности Серра обычно используется мультипликативная запись

$$\mathrm{H}^i(\mathbf{X}, \mathcal{E}) \cong \left(\mathrm{H}^{n-i}(\mathbf{X}, \mathsf{K}_{\mathbf{X}} \otimes \mathcal{E}^*)\right)^*$$

($\mathbf{X}$ – n-мерное многообразие, $\mathcal{E}$ – пучок ростков сечений векторного расслоения, $i = 0, \dots, n$) – см. [**Serre1955**], а в формулировке для кривых $\mathbf{X}$ в предыдущей части курса мы использовали аддитивную

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{L}_D) \cong \left(\mathrm{H}^0(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathsf{K}-D})\right)^*.$$

В случае пучка векторных полей $\mathcal{T} \cong -\mathsf{K}$ последняя формула превращается в

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}) = \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, -\mathsf{K}) \cong \left(\mathrm{H}^0(\mathbf{X}, 2\mathsf{K})\right)^*.$$

В правой части стоит пространство, двойственное к пространству *квадратичных дифференциалов* на $\mathbf{X}$. Элементы этого пространства допускают ясную геометрическую интерпретацию, которую мы обсудим в ближайших лекциях; само пространство настолько важно, что для него вводится специальное обозначение

$$\boxed{\mathsf{Q}[\mathbf{X}] := \mathrm{H}^0(\mathbf{X}, 2\mathsf{K}_{\mathbf{X}})}$$

параллельное обозначению

$$\Omega^1[\mathbf{X}] := \mathrm{H}^0(\mathbf{X}, \mathsf{K}_{\mathbf{X}})$$

для регулярных абелевых дифференциалов.

Теперь двойственность Серра для кривых окончательно переписывается в виде

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}) \cong \mathsf{Q}[\mathbf{X}]^*.$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathrm{T}^*_{\mathbf{X}}\mathcal{M}_g \cong \mathsf{Q}[\mathbf{X}]}$$

(*кокасательное расслоение пространства модулей изоморфно расслоению квадратичных дифференциалов*).
и из теоремы Римана-Роха мы можем заключить, что при $g \geq 2$

$$\dim \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}) = \dim \mathsf{Q}[\mathbf{X}] = \boxed{\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3}$$

ради чего в основном и затевался наш беглый экскурс в неэлементарную математику.

Замечания. (1). У пространства квадратичных дифференциалов $\mathsf{Q}[\mathbf{X}]$ есть то несомненное преимущество перед пространством Кодаиры-Спенсера $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T})$, что в пространстве квадратичных дифференциалов во многих случаях можно выделить *базис*. В приводимых задачах к этой лекции на "вычисления" отображений Кодаиры-Спенсера именно определение результатов спаривания

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}) \times \mathsf{Q}[\mathbf{X}] \longrightarrow \Bbbk$$

в выбранном базисе может считаться полным решением задачи.

(2) Более тщательный анализ точной когомологической последовательности может объяснить введённые выше обозначения $\underline{3g-3}$. Поправки при $g = 0, 1$ объясняются тем, что в точные последовательности входят пространства $\mathrm{H}^0(\mathbf{X}, \mathcal{T})$ *глобальных векторных полей* на кривой, которые сводятся к 0 при $g \geq 2$, но вносят вклад в виде *инфинитезимальных преобразований* при $g \leq 1$.

4.2. Общие алгебро-геометрические свойства пространств модулей

4.2.0. Неприводимость. Специалистам представляется очевидным, что приводимость или неприводимость пространства $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ зависит исключительно от <u>характеристики</u> поля $\Bbbk$.

В случае $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ можно считать $\Bbbk = \mathbb{C}$, и неприводимость следует из трансцендентных соображений (см. ниже). Алгебро-геометрическое доказательство в характеристике 0 также было известно итальянским классикам, оно изложено в [**EnriquesChisini1918**]. Это доказательство было распространено на случай $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$ в работе [**Fulton1969**], но лишь в предположении $p > 2g + 1$. Окончательный результат, однако, верен безо всяких ограничений.

Теорема. *Все пространства модулей $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ неприводимы.*

О доказательстве. См. [**DelMum1969**]. Эта работа исключительно важна для общей теории пространств модулей кривых. Помимо обсуждаемого результата, она содержит первую чисто *алгебро-геометрическую конструкцию* пространств модулей, причём сразу над $\mathrm{spec}(\mathbb{Z})$, а также компактификацию $\overline{\mathcal{M}_g(\Bbbk)}$.■

Принципиальный смысл теоремы неприводимости заключается в том, что *род – единственный дискретный инвариант кривой.*

Этот результат резко контрастирует с теорией *поверхностей*, в которых пространства модулей (для *основного типа*) для данной пары дискретных инвариантов определены и являются *квазипроективными многообразиями* ([**Gieseker1977**]) – но, как правило приводимы, и система дополнительных инвариантов, разделяющих компоненты, к настоящему моменты не построена.

4.2.1. Рациональность. Как мы видели, при $\mathrm{char}(\Bbbk) \notin \{2,3\}$ существует *почти универсальное* семейство кривых рода 1:

$$y^2 = x^3 + \frac{27}{4} \cdot \frac{1728 - j}{j}(x+1)$$

(см. [**Мамфорд1969**]). Среди его слоёв встречаются все кривые рода 1, кроме двух; следовательно, *пространство $\mathcal{M}_1$ рационально.*

Рациональность пространства $\mathcal{M}_2$ также имеет место, но этот результат далеко не тривиален, см. [**Igusa1960**].

Пространства $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$ и $\mathcal{M}_5$ тоже рациональны. Это установлено московским математиком П.И. Кацыло в работах [**Katsylo1996**], [**Кацыло1986**] и [**Кацыло1991**]. Эти работы настолько сложны, что потребовали интерпретаторов, см. [**Böhning2009**].

Рациональность пространства $\mathcal{M}_6$ установлена в гораздо легче читаемой работе [**Shepherd-Barron1989**].

Судя по сравнительно свежей доступной литературе, проблема рациональности пространств $\mathcal{M}_g$ при $g \geq 7$ открыта.

4.2.2. Унирациональность. Многообразие $\mathbf{V}$ называется *унирациональным,* если существует рациональный *доминантный* морфизм

$$\mathbf{P}_N \dashrightarrow \mathbf{V},$$

то есть такой, что образ $\mathbf{P}^N$ всюду плотен в $\mathbf{V}$. Разумно при использовании этого понятия ограничиваться неприводимыми $\mathbf{V}$. Согласно **4.2.0**, вопрос об унирациональности пространств $\mathcal{M}_g$ поставлен корректно.

Интуитивный смысл этой унирациональности заключается в возможности предъявить семейство кривых, рационально зависящее от N параметров, в которое входят *почти* все (то есть за исключением подсемейств положительной коразмерности в $\mathcal{M}_g$) кривые рода g – как правило, по много раз, иначе, как мы видели в предыдущем подразделе, задача сильно упрощается.

Наших сведений о кривых малых родов достаточно, чтобы утверждать унирациональность $\mathcal{M}_g$ при $g \le 4$.

Параметризация $\mathbf{P}_5 \dashrightarrow \mathcal{M}_2$ осуществляется сопоставлением

$$(a_0 : \dots : a_5) \mapsto y^2 = a_0 + a_1 x + \dots + a_5 x^5;$$

из области определения исключаются наборы коэффициентов, задающих многочлены с кратным корнем.

Параметризация $\mathbf{P}_{14} \dashrightarrow \mathcal{M}_3$ покрывает лишь *канонические* кривые рода 3; отображение определено лишь для наборов коэффициентов, определяющих <u>неособые</u> плоские квартики.

Параметризация $\mathbf{P}_9 \times \mathbf{P}_{14} \dashrightarrow \mathcal{M}_4$ с соответствующими ограничениями сопоставляет наборам коэффициентов уравнений квадрики и кубики в $\mathbf{P}_3$ *пересечение этих квадрики и кубики.*

***

Прямая параметризация канонических кривых срабатывает ещё ровно один раз: общая кривая рода 5 является пересечением трёх квадрик в $\mathbf{P}_4$ (задача **4.1**), что даёт параметризацию $\mathbf{P}_{14} \times \mathbf{P}_{14} \times \mathbf{P}_{14} \dashrightarrow \mathcal{M}_5$, но для рода 6 механизм перестаёт работать: см. следующий подраздел.

При $6 \le g \le 10$ унирациональность $\mathcal{M}_g$ можно установить с помощью другого элементарного приёма, реализуя произвольную кривую в виде плоской с простейшими особенностями; этот приём был известен итальянским геометрам в начале XX-го века, см. [**Severi1921**]. В 1970-х годах в московской школе алгебраической геометрии считалась весьма правдоподобной гипотеза Севери об унирациональности <u>всех</u> $\mathcal{M}_g$.

С помощью весьма изощрённых средств в начале XXI века унирациональность $\mathcal{M}_g$ была установлена при $g \le 14$ ([**Verra2005**]).

Но ... сенсацией 1980-х годов было появление работы [**HarrisMumford1982**], в которой было установлено, что *при $g \ge 24$ пространства модулей $\mathcal{M}_g$ являются многообразиями общего типа!* (это – свойство гораздо более сильное, чем просто <u>не</u>унирациональность).

4.2.3. Теорема Петри[5]**.** Она касается одного *типичного* свойства канонических кривых. Сформулируем его, перечислив *исключения*:

- гиперэллиптические и тригональные кривые;
- плоские квартики и квинтики.

[5] Эта теорема называется также теоремой *Нётера-Энриквеса-Петри* и несколькими другими способами. Мы не претендуем на историческую справедливость и выбираем для названия теоремы самый краткий вариант.

Как известно, все негипереэллиптические кривые каноничны, так что в неисключительных случаях мы можем отождествить кривую с её канонической моделью.

Теорема. *Любая каноническая модель неисключительной (в указанном смысле) кривой является пересечением квадрик.*

О доказательстве. См. оригинальные работы [**Enriques1919**], [**Petri1922**] и современные изложения в [**Шокуров1971**], [**Saint-Donat1973**]. ■

Теорема Петри может создать ложное впечатление о том, что *общую* кривую можно задать сравнительно простой системой уравнений – в самом деле, системы квадратичных уравнений – ближайшие соседи систем линейных уравнений.

Но даже в рамках этой грубой аналогии можно пытаться понять, в чём сложность с использованием теоремы Петри – и, в частности, почему из неё <u>не</u> следует унирациональность <u>всех</u> пространств модулей (почему бы не параметризовать канонические кривые наборами коэффициентов пересекающихся квадрик?)

Решения систем линейных уравнений – простой предмет, если задаваемые ими плоскости пересекаются *трансверсально.* Для определённости можно обсудить ситуацию, когда *прямая* в n-мерном пространстве задаётся пересечением гиперплоскостей. Если этих гиперплоскостей $n-1$ и мы знаем, что они пересекаются именно по прямой, то нам гарантирована трансверсальность их пересечения и для описания прямой достаточно применить формулы линейной алгебры. Но если гиперплоскостей существенно больше и они зависят от параметров, то мы имеем дело с ситуацией очень НЕобщего положения; можно переформулировать её как проблему *совместности* системы N линейных уравнений с n неизвестными при $N >> n$ (или, в координатах, об ограниченности ранга огромных матриц).

Ситуация с каноническими кривыми, являющимися пересечениями квадрик, именно такова, только добавляются специфические явления, отличающие квадратичные уравнения от линейных.

Откуда мы знаем, что пересечения квадрик, содержащих канонические кривые, далеки от *общих*? Рассмотрим упомянутый выше случай $g = 6$. Каноническая кривая в $\mathbf{P}_5$ имеет степень $2g-2 = 10$, тогда как степень *общего* пересечения четырёх квадрик равна $2^{g-2} = 16$! Как это может произойти?

Очевидно, единственная возможность состоит в том, что пересечение четырёх квадрик <u>весьма</u> приводимо, и, помимо канонической кривой рода 6 содержит какие-то другие компоненты. Вряд ли современная математика умеет их эффективно описывать.

С ростом g проблема усугубляется, поскольку степень пересечения требуемого количества квадрик зависит от g экспоненциально, а степень канонической кривой – линейно.

Общий вывод заключается в том, что "простые" теоремы о кривых (пересечения квадрик, плоские кривые с простейшими особенностями) связаны с *вырождениями* кривых существенно большего рода. Это мотивирует *компактификации* пространств модулей и "склеивание"конечных $\mathcal{M}_g$ в (пока в основном гипотетическое) $\mathcal{M}_\infty$.

Список литературы

[AdLeRu2007] Alejandro Adem, Johann Leida and Yongbin Ruan, *Orbifolds and Stringy Topology*. Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 171, Cambridge University Press (2007).

[Balaji2010] T. E. Venkata Balaji, *An Introduction to Families, Deformations and Moduli*. Universitätsverlag Göttingen, 2010.

[Böhning2009] Christian Böhning, *The Rationality of the Moduli Space of Curves of Genus 3 after P. Katsylo*. Springer Link, Cohomological and Geometric Approaches to Rationality Problems (2009), pp 17-53.

[DelMum1969] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*. Publications Mathématiques de l'IHÉS. 36: 75–109. .

[Ehresmann1950] Charles Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de Topologie, Bruxelles, pp. 29–55.

[Enriques1919] F. Enriques, *Sulle curve canoniche di genere p dello Spazio a p-1 dimensioni*. Rend. dell'Ace, di Bologna, vol. XXIII pp. 80–82 (1919).

[EnriquesChisini1918] F. Enriques and O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e deUe funzioni algebrich*. Bologna, 1918.

[Fulton1969] William Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 90, No. 3 (Nov., 1969), pp. 542-575.

[Gieseker1977] D. Gieseker, *Global moduli for surfaces of general type*. Invent. Math. 43 (1977) 233-282.

[HarrisMumford1982] J. Harris, D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*. Invent. Math.67 (1982), 23-86.

[Hurwitz1893] A. Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit Eindeutigen Transformationen in sich*. Mathematische Annalen. — 1893. — Т. 41, вып. 3. — С. 403— 442.

[Igusa1960] J.I. Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two*. Ann. of Math. 72 (1960), 612–649.

[Katsylo1996] P.I. Katsylo, *Rationality of the moduli variety of curves of genus 3*. Comment. Math. Helvetici 71 (1996), 507-524.

[Kempf1986] George R. Kempf, *The equations defining a curve of genus 4*. Proc. AMS, vol. 97:2(1986), pp. 219-225.

[Kod2005] K. Kodaira, *Complex Manifolds and deformation of Complex Structures*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Book 283), Springer, 1986.

[Petri1922] K. Petri, *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen*. Math. Ann. 88, 242 (1922).

[Saint-Donat1973] B. Saint-Donat, *On Petri's Analysis of the Linear System of Quadrics through a Canonical Curve*. Math. Ann. 206, 157–t75 (1973).

[Satake1956] Ichirô Satake, *On a generalization of the notion of manifold*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 42 (6): 359–363.

[Sernesi2006] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 334. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Serre1955] Jean-Pierre Serre, *Un théorème de dualité*. Commentarii Mathematici Helvetici, 29(1955): 9–26.

[Serre1956] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), p. 1-42.

[Severi1921] F. Severi, *Vorlesungen ueber Algebraische Geometrie*. Teubner, Leipzig (1921).

[Shepherd-Barron1989] N.I. Shepherd-Barron, *Invariant theory for* S_5 *and the rationality of* $\mathcal{M}_6$. Compositio Mathematica, tome 70, n°1 (1989), p. 13-25.

[**Verra2005**] Alessandro Verra, *The unirationality of the moduli space of curves of genus 14 or lower*. Compositio Math, Volume 141, Issue 6, 1425–1444.

[**Мамфорд1969**] Д. Мамфорд, *Проблемы модулей и их группы Пикара*. Математика (сб. перев.), 1969, том 13, выпуск 2, 26–63.

[**Кацыло1986**] П. И. Кацыло, *Многообразие модулей кривых рода 4 рационально*. Докл. АН СССР, 290:6 (1986), 1292–1294.

[**Кацыло1991**] П. И. Кацыло, *Рациональность многообразия модулей кривых рода 5*. Матем. сб., 182:3 (1991), 457–464.

[**Шокуров1971**] В. В. Шокуров, *Теорема Нётера–Энриквеса о канонических кривых*. Матем. сб., 1971, том 86(128), номер 3(11), стр. 367–408.