Независимый Московский Университет,
Пересечения-2, осень 2020

1

Во всех задачах $\mathbf{X}$ *– полная неприводимая гладкая кривая рода* g *над полем* $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$.

1.1. Пусть $g = 0$, $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$ и $x \in \mathrm{L}(\underline{\infty}) \setminus \Bbbk$. Докажите как можно более подробно и строго, что $\deg(x) = 1$.

1.2. Пусть $g = 1$, $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$, $x \in \mathrm{L}(\underline{2\infty}) \setminus \Bbbk$ и $y \in \mathrm{L}(\underline{3\infty}) \setminus \mathrm{L}(\underline{2\infty})$. Докажите, что если в линейном соотношении над $\Bbbk$

$$ax^3 + by^2 + cxy + dx^2 + ey + fx + g = 0$$

$abcdefg \neq 0$, то $ab \neq 0$.

1.3. В предположении $\mathrm{char}(\Bbbk) \notin \{2, 3\}$ преобразуйте уравнение аффинной кубической кривой в *форме Тейта*

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

к виду

$$y^2 = x^3 - 27c_4x - 54c_6.$$

Убедитесь, что эта кривая гладка тогда и только тогда, когда $c_4^3 \neq c_6^2$.

1.4. В предположениях и обозначениях задач 1.2 и 1.3 рассмотрите проективную кривую $\mathbf{E}_{c_1,c_2}$, заданную уравнением $y^2z = x^3 - 27c_4xz^2 - 54c_6z^3$, и докажите, что морфизм кривых $(x : y : 1) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}_{c_1,c_2}$ является изоморфизмом.
Указание. Иначе рассматриваемый морфизм был бы либо разветвлённым накрытием, либо *изогенией* степени, большей 1. Первая возможность в силу *формулы Римана-Гурвица* противоречила бы предположению $g = 1$, а вторая – свойству $\deg x = 2$.

1.5. Для $f = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk}x^iy^jz^k$ условие наличие особой точки на кубике, заданной уравнением $f = 0$, состоит в совместности системы уравнений $[f = 0] \wedge \left[\frac{\partial f}{\partial x} = 0\right] \wedge \left[\frac{\partial f}{\partial y} = 0\right] \wedge \left[\frac{\partial f}{\partial z} = 0\right]$. Докажите, что условие этой совместности задаёт *гиперповерхность* $\mathbf{Sing} \subset \mathbf{P}_9(\Bbbk)$ и что набор коэффициентов вне $\mathbf{Sing}$ определяет *гладкую* кривую.

1.6. Докажите, что для любой гладкой кубики на проективной плоскости найдётся *прямая перегиба*, то есть прямая, пересекающая кубику (*трёхкратно*) в единственной точке.

15 сентября, *Г.Б. Шабат*