Независимый Московский Университет,
Пересечения-2, осень 2020

2

Предполагается фиксированным поле $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$, и все кривые определены над ним.

2.1. Проверьте, что формула (2.1.0b) действительно определяет действие проективной линейной группы на множестве уравнений кубики.

2.2. Определите степень гиперповерхности $\mathbf{Sing}_9 \subset \mathbf{P}_9(\Bbbk)$.

2.3. Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 3$. Найдите все точки перегиба на *кубике Ферма* $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Есть ли среди троек этих точек коллинеарные? Объясните неприятности, происходящие в характеристике 3.

2.4. Рассмотрите уравнение *гладкой* кубики в $\mathbf{P}_2$

$$ax^3 + by^2z + cxyz + dx^2z + ez^2 + fxz^2 + gz^3 = 0$$

и для каждого монома $m \in \{x^3, \ldots, xz^2\}$ вычислите порядок полюса в точке $\underline{\infty} = (0:1:0)$.

2.5. Проверьте, что коэффициенты уравнения, задающего объединение трёх прямых в $\mathbf{P}_2$, удовлетворяют уравнению (2.1.1d) гиперповерхности $\mathbf{Sing}_6 \subset \mathbf{P}_6$ из лекции.

2.6. Пусть даны две проективно эквивалентные гладкие кубики $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$, и пусть на каждой из выделены их прямые перегиба $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$. Докажите, что найдётся совмещающее их проективное преобразование $\alpha : \mathbf{P}_2(\Bbbk) \to \mathbf{P}_2(\Bbbk)$, совмещающее эти прямые, то есть такое, что $\alpha(\ell_1) = \ell_2$.

2.7. Найдите точки 2-го порядка на кривой $y^2 + y = x^3$ над полем $\overline{\mathbb{F}_2}$.

2.8. Обоснуйте переход от 7-членного уравнения плоской кубики к 6-членному.

2.9. Установите неприводимость гиперповерхности $\mathbf{Sing}_4 \subset \mathbf{A}_4$.

2.10. Обоснуйте переход от 6-членного уравнения плоской кубики к 2-членному.

23 сентября, *Г.Б. Шабат*