

**Независимый Московский Университет,
Пересечения-2, осень 2020**

3

Предполагается фиксированным поле $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$, и все кривые определены над ним.

3.1. Проверьте, что наивное понятие *точки кривой* $P \in \mathbf{X}$ соответствует морфизму $\iota_P : \text{спес}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{X}$ в категории окольцованных пространств.

3.2. Какие срезы из предыдущей лекции задавали *семейства кривых*? Опишите явно их базы, слои и тела.

3.3. Считая, что j -инвариант полностью определяет класс изоморфности кривой рода 1, вычислите (в тех случаях, когда это реально...) *классифицирующие отображения* для семейств из предыдущей задачи. Определите *критические значения* этих отображений.

3.4. Выбрав какой-нибудь вариант категории \mathcal{BAS} , убедитесь, что функтор \mathbf{fam}_1 сопоставляет любой базе бесконечное множество.

3.5. Вычислите монодромию комплексного семейства кривых $y^2 = x^3 - \epsilon$ при обходе $\epsilon = 0$. Затем предложите алгебраическое доказательство нетривиальности этого семейства над произвольным \mathbb{k} .

3.6. Определите категорию $\widehat{\mathcal{M}}_1(\mathbb{k})$ кривых рода 1, снабжённым изоморфизм группы точек второго порядка с фиксированным векторным пространством размерности 2 над \mathbb{F}_2 . С помощью универсальной кривой $y^2 = x(x-1)(x-t)$ задайте морфизм $\widehat{\mathcal{M}}_1(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{k})$ как функцию $j(t)$. Найдите критические значения этой функции и объясните их.

3.7. Убедитесь, что две аффинные кривые

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 : v^2 = u^6 + m_5 u^5 + m_4 u^4 + m_3 u^3 + m_2 u^2 + m_1 u + 1$$

и

$$\ddot{\mathbf{X}}_\infty : V^2 = U^6 + m_1 U^5 + m_2 U^4 + m_3 U^3 + m_4 U^2 + m_5 U + 1,$$

связанные *отношениями соседства* $u = \frac{1}{U}, v = \frac{V}{U^3}$, определяют полную кривую $\mathbf{X} = \ddot{\mathbf{X}}_0 \cup \ddot{\mathbf{X}}_\infty$. Проверьте, что $\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \frac{du}{v}, \frac{udu}{v} \rangle$.

Совет. Введите 4 точки, определяемые соотношениями

$$u(O^\pm) = 0, v(O^\pm) = \pm 1, U(\infty^\pm) = 0, V(\infty^\pm) = \pm 1.$$

30 сентября, Г.Б. Шабат