Независимый Московский Университет,
Пересечения-2, осень 2020

4

4.1. Представьте канонические кривые рода 5 как пересечения трёх квадрик и выведите из этого представления эвристическое предположение о размерности пространства модулей $\mathcal{M}_5$.

4.2. Опишите касательные пространства к пространству модулей $\mathcal{M}_2(\Bbbk) \simeq \frac{\widehat{\mathcal{M}_2(\Bbbk)}}{\mathsf{S}_6}$, где $\widehat{\mathcal{M}_2(\Bbbk)} = \{(t_1, t_2, t_3)\} \subset \Bbbk^3$ задаётся условиями $t_i \neq \{0, 1\}$ и $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, тройка (t_1, t_2, t_3) задаёт кривую по правилу

$$(t_1, t_2, t_3) \longleftrightarrow y^2 = (x)(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3),$$

а группа S_6 переставляет элементы множества $\{0, 1, \infty, t_1, t_2, t_3\}$.
<u>Уточнение</u>. Для произвольной точки $[\mathbf{X}] \in \mathcal{M}_2(\Bbbk)$ необходимо описать *базис* трёхмерного пространства $\mathrm{T}_{[\mathbf{X}]}\mathcal{M}_2(\Bbbk)$.
<u>Совет</u>. Воспользуйтесь симметрическими многочленами.

4.3. Докажите, что изменение тривиализации, с помощью которой определяется отображение Кодаиры-Спенсера, не меняет класс когомологичности коцикла.

4.4. Рассмотрите семейство эллиптических кривых над *верхней полуплоскостью* $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$, "повесив" над каждой $\tau \in \mathcal{H}$ кривую $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}$. Вычислите (в любой форме) соответствующее отображение Кодаиры-Спенсера.

4.5. Рассмотрите <u>гладкие</u> аффинные кривых в "(x, y)-плоскости", задаваемые уравнением $0 = F \in \Bbbk[x, y, t]$, где $\Bbbk$ – произвольное алгебраически замкнутое поле. Их можно считать *семейством кривых* над "t-прямой", на классическом языке рассмотрев проекцию "$\varpi : (x, y, t) \mapsto t$", а на нашем – введя базу $\mathbf{B} \subseteq \mathrm{spec}\big(\Bbbk[t]\big)$ и проекцию, ассоциированную с вложением $\varpi^* : \Bbbk[t] \hookrightarrow \frac{\Bbbk[x,y,t]}{\langle F \rangle}$.

Введите недостающие обозначения и вычислите отображение Кодаиры-Спенсера (помня, что речь идёт о семействе *неполных* кривых). <u>Совет</u>. Чтобы добиться требуемых равенств $\varpi_* \partial = \frac{\partial}{\partial t}$, рассмотрите векторные поля вида $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}$, удовлетворяющие $\partial \cdot F = 0$, где $a, b \in \Bbbk(x, y, t)$, и обеспечьте их регулярность в картах $F_x \neq 0$ и $F_y \neq 0$.

4.6. Обобщите конструкцию предыдущей задачи на семейство гиперэллиптических кривых $v^2 = (u - t_1) \dots (u - t_{2g+2})$, где $t_1 \dots t_{2g+2} = 1$. С помощью замен координат $u = \frac{1}{U}, v = \frac{V}{U^{g+1}}$ пополните слои этого семейства и вычислите отображение Кодаиры-Спенсера.

4.7. Рассмотрите семейство эллиптических кривых $y^2 = x(x-1)(x-t)$ и вложите его слои в проективную плоскость. Вычислите отображение Кодаиры-Спенсера.

1 октября, *Г.Б. Шабат*