

5

5.1. Определите композицию морфизмов в категории \mathcal{GRP} и проверьте корректность вашего определения.

5.2. Проведите подробное доказательство теоремы из подраздела 5.1.0. Обращайте особое внимание на доказательства корректности, необходимость которых связана с произвольными выборами.

5.3. Докажите, что дискретная подгруппа группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на верхней полуплоскости \mathcal{H} свободно тогда и только тогда, когда не содержит эллиптических элементов.

5.4. Определите нормализатор группы $\Gamma = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ в группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Идентифицируйте фактор верхней полуплоскости по группе Γ и группу автоморфизмов этого фактора.

5.5. Определите нормализатор группы $\Gamma = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$ в группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Идентифицируйте фактор верхней полуплоскости по группе Γ и группу автоморфизмов этого фактора.

5.6. Модулярная группа $\Gamma(2)$ определяется из точной последовательности

$$1 \longrightarrow \Gamma(2) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow 1.$$

Докажите, что $\Gamma(2)$ действует на \mathcal{H} без неподвижных точек и что фактор $\frac{\mathcal{H}}{\Gamma(2)}$ имеет конечную площадь. Идентифицируйте этот фактор как проколотую компактную риманову поверхность.

5.7. Реализуйте дробно-линейными преобразованиями склейки сторон правильного гиперболического 8-угольника в соответствии со стандартной схемой теории поверхностей, то есть $ababcdcd$. Проверьте стандартное соотношение для образующих фундаментальной группы рода 2.

5.8. Обозначим Δ_8 фуксову группу из предыдущей задачи. Вычислив её нормализатор в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, определите группу автоморфизмов $\mathrm{Aut} \frac{\mathcal{H}}{\Delta_8}$. Задайте фактор $\frac{\mathcal{H}}{\Delta_8}$ полиномиальным уравнением.

8 октября, Г.Б. Шабат