Тема 2: Спинорные структуры и операторы Дирака

1. Докажите, что

   a) вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ имеет спинорную структуру, если и только если $n \equiv 3 \pmod 4$;

   b) комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет спинорную структуру только если n нечетное;

   c) кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ имеет спинорную структуру при всех n.

   Сколько разных спинорных структур имеют эти пространства?

2. Покажите, что любая риманова поверхность (комплексная кривая) Σ_g рода g —спинорное многообразие и имеет ровно 2^{2g} различных спинорных структур, соответствующих комплексным линейным расслоениям на Σ_g, квадрат которых равен касательному расслоению.

3. Докажите, что неособая проективная (гипер)поверхность в $\mathbb{C}P^n$, задающаяся однородным уравнением степени d, спинорная если и только если число $n+d$ — четное. Более общо, полное трансверсальное пересечение k таких поверхностей степеней $d_1, \dots, d_k$ имеет спинорную структуру если и только если $n + k + 1 + d_1 + \cdots + d_k$ — четное число.

4. Докажите, что тривиальное двулистное накрытие над $P^{S^1}_{SO} = S^1$, задающее спинорную структуру на S^1, не может быть получено как ограничение на S^1 спинорной структуры на некотором 2-мерном спинорном многообразии с краем W, $\partial W = S^1$, а та же структура на несвязном объединении двух таких окружностей — может, так что группа кобордизмов $\Omega_1^{\mathrm{Spin}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что оператор Дирака на $\mathbb{R}^4$ (на тривиальном расслоении, ассоциированном с модулем $V = \mathbb{H}^2$ над алгеброй $Cl_4 = \mathrm{Mat}_4(\mathbb{H})$ может быть записан в виде матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{q}} & 0 \end{pmatrix},$$

   где в координатах x^1, x^2, x^3, x^4 на $\mathbb{R}^4$ и для $\mathbb{H} = a + ib + jc + kd$ мы положим

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} - j\frac{\partial}{\partial x^3} - k\frac{\partial}{\partial x^4},$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} + j\frac{\partial}{\partial x^3} + k\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

6. Пусть D, $\widehat{D}$ — левый и правый операторы Дирака на расслоении алгебр Клиффорда $Cl(X)$ над римановым многообразием X. Пусть $L : Cl(X) \to Cl(X)$ — линейный оператор на расслоении $Cl(X)$, заданный в локальных координатах формулой $L(\varphi) = -\sum_{j=1}^n e_j \varphi e_j$, где $e_1, \dots, e_n$ — локальный ортобазис в TX. Докажите формулы:

$$DL + LD = 2\widehat{D}, \;\; \widehat{D}L + L\widehat{D} = 2D.$$

7. Докажите, что индекс Cl-линейного оператора Дирака на S^1 со спинорной структурой, заданной тривиальным двулистным накрытием над $P^{S^1}_{SO}$, в $KO^{-1}(pt) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ отличен от нуля.

8. * Найдите индексы Cl-линейных операторов Дирака на $T^2 = S^1 \times S^1$ для всех существующих различных спин-структур на торе.

9. Докажите прямым вычислением, что индекс Cl-линейного оператора Дирака на S^2 (соответствующего единственной спинорной структуре на сфере), равен нулю.

10. Пусть E — ортогональное векторное расслоение над спинорным многообразием X, $S(X)$ — ассоциированное спинорное расслоение, D_E — "E-значный оператор Дирака" на $S(X) \otimes E$, κ — скалярная кривизна связности Леви-Чивита на X. Пусть $\mathfrak{R}^E : S(X) \otimes E \to S(X) \otimes E$ — оператор, заданный в локальных координатах формулой

$$\mathfrak{R}^E(\sigma \otimes s) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} e_j e_k \sigma \otimes R^E_{e_j,e_k}(s),$$

где R^E — оператор кривизны на E в ортогональной связности, а $e_1, \dots, e_n$ — локальный ортобазис на многообразии. Докажите формулу

$$D_E^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4}\kappa + \mathfrak{R}^E.$$