Тема 3: Псевдодифференциальные операторы

1. Докажите, что два фредгольмовых оператора между гильбертовыми пространствами E и F гомотопны друг другу (в пространстве фредгольмовых операторов) если и только если у них совпадает индекс.

2. Найдите след (как сумму некоторого ряда) оператора e^{-tD^*D}, где D — оператор Дирака на окружности; найдите асимптотику этого ряда при $t \to 0+$. Воспользуйтесь этим результатом чтобы найти индекс оператора Дирака.

3. Расширим преобразование Фурье на обобщенные функции (линейных функционалах на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функций Шварца) так, чтобы выполнялось равенство

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*.$$

   Вычислите преобразования Фурье для следующих элементов $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$:

   a) $\delta(t - t_0)$;

   b) t^n, $n \in \mathbb{Z}$;

   c) $\cos(at)$;

   d) $\exp(-at^2)$.

4. Эллиптическим комплексом порядка d над многообразием M называется последовательность векторных расслоений и $\Psi_d DO$ между ними:

$$0 \to \Gamma^\infty(E_1) \xrightarrow{P_1} \Gamma^\infty(E_2) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_n} \Gamma^\infty(E_{n+1}) \to 0,$$

   при условии, что $P_{i+1}P_i = 0$, $\sigma_L(P_{i+1})\sigma_L(P_i) = 0$ для всех i (тут $\sigma_L(P)$ обозначает старший символ оператора, который мы рассматриваем как сечение расслоения гомоморфизмов между обратными образами расслоений на T^*M) и что последовательность символов точна вне нулевого сечения T^*M. Выберем риманову структуру на M и эрмитовы структуры на E_i, и введем на $\Gamma^\infty(E_i)$ скалярное произведение. Пусть $P_i^* : \Gamma^\infty(E_{i+1}) \to \Gamma^\infty(E_i)$ — сопряженные операторы,

$$\Delta_i = P_i^* P_i + P_{i-1} P_{i-1}^*.$$

   Докажите, что (E_i, P_i) — эллиптический комплекс порядка d, если и только если Δ_i — эллиптические операторы порядка $2d$ (для всех i)ю

5. Пусть M — ориентированное риманово многообразие; докажите, что комплекс де Рама в этом случае — эллиптический (см. предыдущую задачу), а сопряженные операторы выражаются через оператор $*$ Ходжа обычным образом.