Гомологии (анонс)

▷ Напомним, что функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ — это сопоставление каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ объекта $F(X)$ категории $\mathcal{D}$ и каждому морфизму $f\colon X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ морфизма $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ категории $\mathcal{D}$, при котором $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ и $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Задача 1.1. Напомним, что морфизм $f\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $g\colon Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Покажите, что функтор переводит изоморфизмы в изоморфизмы.

▷ Ниже — несколько свойств групп гомологий, которыми предлагается пользоваться для решения задач листка. Определения гомологий и доказательства этих свойств будут обсуждаться в течение семестра.

0) H_n (“n-е гомологии”) — функтор из гомотопической категории (объекты — топологические пространства, морфизмы — классы гомотопии непрерывных отображений) в категорию абелевых групп.

1) $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n$, где n — количество компонент линейной связности пространства X.

2) Если M — n-мерное многообразие, то $H_N(M) = 0$ при $N > m$;

3) Если M — n-мерное замкнутое ориентируемое многообразие (например, S^n), то $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$.

Задача 1.2. Покажите, что гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные гомологии.

Задача 1.3. Докажите, что вложение точки в произвольное пространство X индуцируют *вложение* $H(pt) \to H(X)$. И то же для вложения $A \to A \vee X$.

Задача 1.4. Докажите, что тождественное отображение сферы (любой размерности) в себя не гомотопно постояному.

Задача 1.5. Докажите, что не существует ретракции полнотория на его границу.

Задача 1.6. Докажите, что при $n \neq m$ а) пространства S^n и S^m гомотопически не эквивалентны; б) пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.