

Клеточные пространства и отображения

- ▷ Пусть хаусдорфово топологическое пространство разбито на *открытые клетки* e_i , гомеоморфные открытым шарам. Напомним, что оно называется клеточным (или CW-) пространством, если гомеоморфизмы $\sigma_i: \text{int } D^n \rightarrow e_i$ продолжены до отображений $\bar{\sigma}_i$ из замкнутых шаров и выполняются два условия:

(C) образ каждой из границ клетки ∂D^n при отображении $\bar{\sigma}_i$ содержится в конечном объединении клеток размерности меньше n ;

(W) множество замкнуто тогда и только тогда, когда замкнут его прообраз при каждом из отображений σ_i .

Задача 2.1. Введите структуру CW-пространства на а) S^1 , S^n , \mathbb{R} , \mathbb{R}^n ; б) $\mathbb{R}P^n$; в) CP^n .

Задача 2.2. Введите структуру CW-пространства на $SO(n)$ (т. е. на пространстве ортонормальных базисов в \mathbb{R}^n).

Задача 2.3. Пусть A — клеточное подпространство клеточного пространства X .

а) Докажите, что если A — стягиваемо, то отображение $X \rightarrow X/A$ — гомотопическая эквивалентность (ср. с задачей 5.4 прошлого семестра).

б) Докажите, что $X/A \approx X \cup_A CA$, где CA — конус над пространством A .

в) Докажите, что если A стягиваемо по X (т. е. вложение $A \rightarrow X$ гомотопно отображению в точку), то $X/A \approx X \vee \Sigma A$ (ср. с задачей 5.5 прошлого семестра).

Задача 2.4. Приведите пример пространства, разбитого на клетки, для которого выполнены все условия в первом определении, кроме (W).

- ▷ *Теорема о клеточной аппроксимации* состоит в том, что любое отображение $f: X \rightarrow Y$ между клеточными пространствами можно прогомотопировать в клеточное. Если f уже является клеточным в ограничении на подкомплекс $A \subset X$, гомотопию можно выбрать постоянной на A .

Задача 2.5. а) Докажите, что клеточное пространство X линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связан его 1-остов $X^{(1)}$.

б) Докажите, что фундаментальная группа клеточного пространства определяется его 2-остовом, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{(2)})$.

Задача 2.6. Докажите, что при $k < n$ любое отображение из S^k в S^n гомотопно постоянному.

Задача 2.7. а) Введите клеточную структуру на сфере $S^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, где $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$ — пространство финитных последовательностей с топологией прямого предела.

б) Докажите, что она стягиваема.