Расслоения и гомотопические группы

▷ Отображение $\pi\colon E \to B$ называется *расслоением* со *слоем* F, *тотальным пространством* E и *базой* B, если у каждой точки базы есть такая окрестность U, что существует гомеоморфизм $\pi^{-1}U \cong F \times U$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} F \times U \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "pr_2"] & \pi^{-1}U \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, equal] & U. \end{tikzcd}$$

Задача 3.0. Предъявите отображение $\pi\colon E \to B$, не являющееся расслоением, при котором прообразы всех точек гомеоморфны одному и тому же пространству F.

Задача 3.1. Постройте нетривиальное расслоение над окружностью со слоем окружность. Какая поверхность является его тотальным пространством?

Задача 3.2. Убедитесь в том, что отображение Хопфа

$$(z, w) \mapsto (z : w),\ S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \to \mathbb{C}P^1 = S^2,$$

действительно является расслоением со слоем окружность.

Задача 3.3. Покажите, что $\mathbb{C}P^2$ получается из $\mathbb{C}P^1$ приклейкой диска D^4 по его границе при помощи расслоения Хопфа $\partial D^4 = S^3 \to \mathbb{C}P^1$.

Задача 3.4. Постройте расслоение, найдите его слой
а) $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$; б) $\mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$; в*) $S^7 \to S^4$;
г) $V_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$, где V_k — пространство ортонормальных k-реперов (для $k = n$ получается расслоение $SO(n) \to S^{n-1}$); д) $V_k(\mathbb{R}^n) \to Gr_k(\mathbb{R}^n)$.

▷ В задачах о гомотопических группах кроме того, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$, можно пользоваться тем, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (полезно изучить доказательство в каком-нибудь учебнике).

Задача 3.5. Докажите, что n-я гомотопическая группа клеточного пространства определяется его $(n+1)$-остовом, $\pi_n(X) \cong \pi_n(X^{(n+1)})$ (ср. с задачами 2.5 и 2.6).

Задача 3.6. Докажите, что если $E = F \times B$, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.

Задача 3.7*. Вычислите (для $n > 1$; ср. с $n = 1$) а) $\pi_n(S^n \vee S^n)$; б) $\pi_n(S^n \vee S^1)$.

▷ По любому расслоению можно построить точную последовательность групп

$$\ldots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \ldots$$

Задача 3.8. Вычислите все гомотопические группы пространства а) $\mathbb{R}P^\infty$; б) $\mathbb{C}P^\infty$.

Задача 3.9. Докажите обобщение задачи 6: если у расслоения $F \to E \to B$ есть сечение, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.

Задача 3.10*. Докажите, что $\pi_n(S^4) \cong \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3)$; в частности, $\pi_7(S^4)$ содержит $\mathbb{Z}$ в качестве прямого слагаемого.

Можно показать, что группы $\pi_{4n-1}(S^{2n})$, как и $\pi_n(S^n)$, всегда имеют ранг 1, а все остальные гомотопические группы сфер конечны.