Гомотопические группы и гомотопии

Задача 4.1. а) Докажите, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$.
б*) То же для сферы с g ручками (указание: припомните гиперболическую геометрию).

Задача 4.2. а) Докажите, что группы $\pi_n(X, A)$ коммутативны при $n > 2$.
б) Приведите пример пары, для которой группа $\pi_2(X, A)$ не коммутативна.

Задача 4.3. Докажите, что если A — ретракт пространства X, то $\pi_n(A) \to \pi_n(X)$ — вложение, и более того, $\pi_n(X) \cong \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A)$.

Задача 4.4. Докажите, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ невозможно ретрагировать на его проективное подпростанство $\mathbb{R}P^k$.

Задача 4.5. а) Докажите, что связное клеточное пространство, все гомотопические группы которого тривиальны, стягиваемо.
б) Докажите, что если A такое связное клеточное подпространство связного клеточного пространства X, что все относительные гомотопические группы $\pi_n(X, A)$ тривиальны, то A — строгий деформационный ретракт пространства X.

Задача 4.6*. Пусть клеточное пространство X связно и n-связно (т. е. тривиальны группы $\pi_1(X), \ldots, \pi_n(X)$). Докажите, что X гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-клеткой и без клеток размерностей $1, \ldots, n$.

Задача 4.7. Докажите, что пространство $V_k(\mathbb{R}^\infty)$ стягиваемо.
(Обозначения — как в задачах 3.4 и 2.7.)

Задача 4.8. Докажите теорему Уайтхеда: если отображение связных клеточных пространств индуцирует изоморфизм во всех гомотопических группах, то оно является гомотопической эквивалентностью.

Указание: для клеточных вложений это следует из задачи 5б), а произвольное отображение $f\colon X \to Y$ можно заменить на вложение $X \to \mathrm{Cyl}(f) := (X \times [0;1]) \sqcup Y / \big((x,1) \sim f(x)\big)$.

Задача 4.9. Убедитесь, что у пространств а) $S^n \times \mathbb{R}P^m$ и $S^m \times \mathbb{R}P^n$; б) S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ все гомотопические группы одинаковые.

Позже мы сможем доказать, что они, тем не менее, гомотопически не эквивалентны. Таким образом наличие *отображения*, индуцирующего изоморфизм, в условиях теоремы Уайтхеда существенно.

Задача 4.10. а) Докажите, что пространство $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ гомотопически эквивалентно S^1.

Тем, что пространство петель на CW-комплексе имеет гомотопический тип CW-комплекса, можно пользоваться без доказательства.

б*) Докажите, что если у клеточного пространства такие же гомотопические группы как у $\mathbb{C}P^\infty$ («пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$»), то они гомотопически эквивалентны.