Сингулярные гомологии

▷ Все гомологии в этом листке (до последней задачи) — сингулярные.

Задача 7.0. $H_0(X)$ — свободная группа, ранг которой — число компонент линейной связности пространства X.

Задача 7.1. Вычислите гомологии точки.

Задача 7.2. Триангулируйте без дополнительных вершин а) призму $\Delta^n \times I$; б*) произведение симплексов $\Delta^n \times \Delta^m$.

Задача 7.3. Приведите пример подпространств X_1, X_2 клеточного пространства $X = X_1 \cup X_2$, для которых последовательность Майера–Вьеториса не точна.

▷ Далее можно пользоваться основными свойствами сингулярных гомологий: функториальность, гом. инвариантность, точная последовательность пары, вырезание, точная последовательность Майера-Вьеториса для открытых подмножеств.

Задача 7.4. Вычислите гомологии букета сфер.

Задача 7.5. Вычислите гомологии пары $(M^n, M^n \setminus \{pt\})$ для произвольного n-мерного многообразия (следствие: корректность размерности).

Задача 7.6. Докажите, что а) $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup CA)$; б) если (X, A) — клеточная пара, то $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$ (полезно вспомнить задачу 2.3).

Задача 7.7*. Постройте морфизм между функторами сингулярных и симплициальных гомологий конечных симплициальных пространств. Докажите, что этот морфизм является изоморфизмом (указание: для доказательства шага индукции по номеру остова пригодится 5-лемма).

▷ Сингулярные гомологии пространства X суть симплициальные гомологии пространства X^Δ, состоящего из всевозможных сингулярных симплексов в X. Можно доказать, что для клеточных пространств естественное отображение $X^\Delta \to X$ является гомотопической эквивалентностью.