Неподвижные точки и теорема Лефшеца

Задача 8.1. Постройте явно векторное поле без особых точек а) на S^3; б) на S^{2k+1}.

▷ Число Лефшеца $\Lambda(f)$ отображения f — это суперслед отображения f_* на гомологиях (т.е. берем следы на гомологиях с четными номерами со знаком плюс, с нечетными — со знаком минус).

Задача 8.2. Найдите число Лефшеца для а) отражения окружности; б) тождественного отображения S^n; в) антиподального отображения S^n.

▷ Пусть f — отображение компактного многообразия (или конечного CW-комплекса) в себя. Теорема Лефшеца утверждает, что если $\Lambda(f) \neq 0$, то отображение имеет неподвижные точки. (Можно сказать и больше: $\Lambda(f)$ равно количеству неподвижных точек, посчитанных с правильными кратности, если этих точек конечное число.)

Задача 8.3. Выведите из теоремы Лефшеца, что
а) если $\tilde{H}(X;\mathbb{Q}) = 0$, то любое непрерывное отображение (конечного клеточного) пространства X в себя имеет неподвижную точку;
б) если замкнутое (компактное без края) многообазие имеет ненулевую эйлерову характеристику, то любое векторное поле на нем имеет особую точку.

Задача 8.4. При каких n существует отображение $\mathbb{R}P^n$ в себя без неподвижных точек?

Задача 8.5. а) Найдите число Лефшеца отображения $\mathbb{C}P^n$ в себя, задаваемого данным линейным оператором.
б) Выведите из теоремы Лефшеца существование собственного вектора у любого оператора и основную теорему алгебры.