Когомологии многообразий

Задача 9.1. Вычислите по определению симплициальные когомологии тетраэдра.

Задача 9.2. а) Убедитесь в том, что $H^\bullet(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}(H_\bullet(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.
б) Докажите, что если F — поле, то $H^\bullet(X;F) \cong \mathrm{Hom}(H_\bullet(X),F)$.

▷ Напомним, что для замкнутого (т.е. компактного без края) n-многообразия M определен изоморфизм Пуанкаре $*\colon H_{n-k}(M) \to H^k(M)$ (для произвольных коэффициентов, если M ориентированно, для коэффициентов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в общем случае).

Задача 9.3. Изучите, как конкретно устроен изоморфизм Пуанкаре для двумерного тора с обычным клеточным разбиением.

▷ При изоморфизме Пуанкаре умножение в когомологиях соответствует пересечению циклов:

$$[N_1]^* \smile [N_2]^* = [N_1 \cap N_2]^*$$

для пересекающихся трансверсально (т. е. в каждой точке пересечения касательные вектора N_1 и N_2 порождают все касательное пространство M) подмногообразий N_1 и N_2.

Задача 9.4. Найдите кольцо когомологий а) тора; б) сферы с g ручками.

Задача 9.5. а) Докажите, что $S^n \times S^m$ гомотопически не эквивалентно $S^n \vee S^m \vee S^{n+m}$
б*) ...но они становятся гомотопически эквивалентны после надстройки.

Задача 9.6. Докажите, что
а) $H^\bullet(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[a]/(a^{n+1})$, где $a = [\mathbb{R}P^{n-1}]^* \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$;
б) $H^\bullet(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, где $x = [\mathbb{C}P^{n-1}]^* \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$.

Задача 9.7. Докажите, что любое отображение $\mathbb{C}P^{2n}$ в себя имеет неподвижную точку.

Задача 9.8. а) Докажите, что комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная однородным полиномиальным уравнением степени d реализует класс $dx \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, где x — класс гиперплоскости.
б) Докажите, что если система из n полиномиальных уравнений степеней $d_1,\ldots,d_n$ на n неизвестных имеет конечное число решений, то этих решений не более $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

▷ Если M — замкнутое n-многообразие, то $\frown$-произведение задает невырожденное спаривание $H_k(M;F) \times H_{n-k}(M;F) \to F$ (для произвольного поля F, если многообразие ориентированно, для $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в общем случае). В частности, соответствующие группы гомологий (неканонически) изоморфны.

Задача 9.9. а) M — нечетномерное замкнутое многообразие. Докажите, что $\chi(M) = 0$.
б) Докажите, что если M является краем компактного мноогобразия, то $\chi(M)$ четно.
в*) Является ли $\mathbb{R}P^n$ краем какого-либо компактного многообразия?