Лекция 7.

Трехмерные диаграммы Юнга

(плоские разбиения = plane partitions)

$$\begin{array}{cccc} & \geq & & \\ & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \;\dots \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \;\dots \\ & \lambda_{31} & \dots & \\ & \vdots & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & \\ 1 & & \end{array}$$

$$n \vdash \lambda_{ij}$$

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} = n$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{ij} & \geq & \lambda_{i\,j+1} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\ \lambda_{i+1\,j} & & \end{array}$$

Задача. Сколько трёхмерных диаграмм Юнга помещаются в "коробку" $a \times b \times c$?

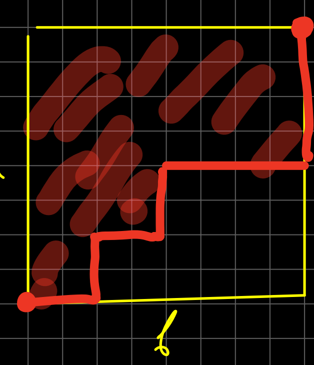
$\mathbb{P}(a, b, c)$. c - высота коробки

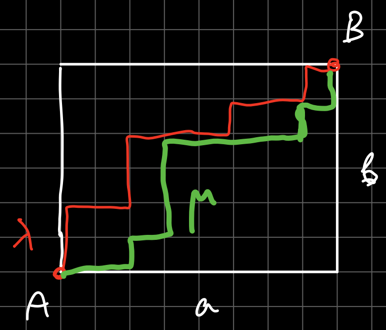
Пример: $c = 1$.

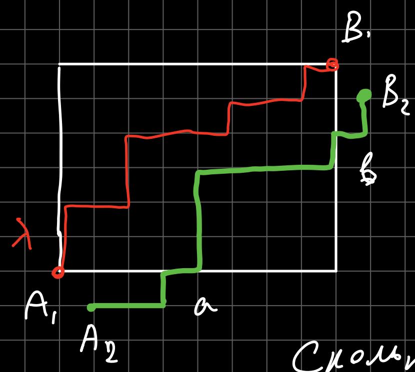
$$\mathbb{P}(a, b, 1) = \binom{a+b}{a}$$

А что, если $c = 2$?

$$\#\{\lambda \subset \mu \subset a \times b\} = \mathbb{P}(a, b, 2) = ?$$







$\lambda: A_1 \to B_1$

$\mu: A_2 \to B_2$

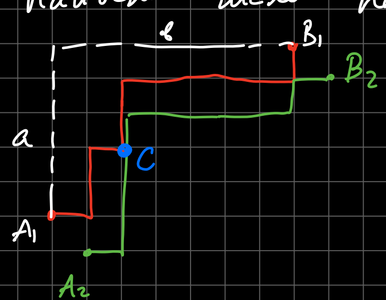
пути λ, μ не пересекаются

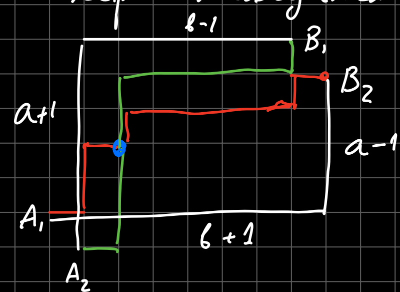
Сколько таких пар?

① Сколько всего пар путей $\lambda: A_1 \to B_1$, $\mu: A_2 \to B_2$?

$$\binom{a+b}{a}^2$$

② Найдем число пар пересекающихся путей.





$$\tau: \begin{pmatrix} \text{пара перес. путей} \\ A_1 \to B_1,\ A_2 \to B_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{пара } \cancel{\text{перес.}} \text{ путей} \\ A_1 \to B_2,\ A_2 \to B_1 \end{pmatrix}$$

биекция

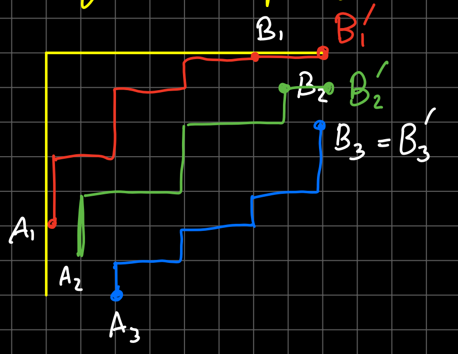
Этих пар путей: $\binom{a+b}{a-1} \cdot \binom{a+b}{a+1}$.

Предл. $P(a,b,2) =$

$$= \binom{a+b}{a}^2 - \binom{a+b}{a-1}\binom{a+b}{a+1} =$$

$$\begin{vmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a-1} \\ \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} \\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} \end{vmatrix}.$$

Случай произвольного числа "этажей" c.

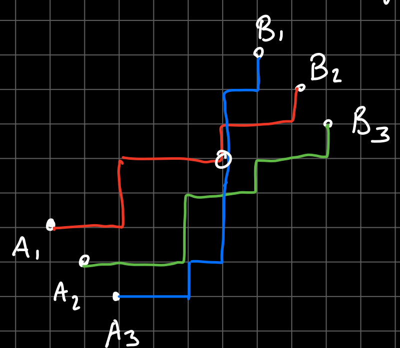


Рассм. наборы из c путей, соед. $A_1, A_2, \dots A_c$ с $B_1, \dots B_c$

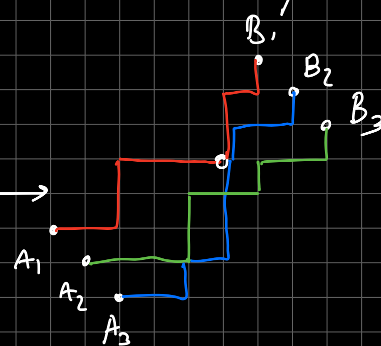
$$A_i \longmapsto B_{w(i)}, \quad w \in S_c.$$

$$w : \{1, \dots c\} \longrightarrow \{1, \dots c\}$$

Набор путей не сод. пересечений, только если $w = Id$.



$$\xleftrightarrow{\;r\;}$$



$\operatorname{sgn} w' = -1.$

$w : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{sgn} w = +1.$ $\qquad w' : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

r: инволюция на мн-ве наборов перес путей;

$$\operatorname{sgn} w = -\operatorname{sgn} r(w).$$

$$\begin{matrix}\text{Число наборов} \\ \text{не перес. путей}\end{matrix} = \sum_{w \in S_c} \operatorname{sgn} w \cdot \begin{pmatrix}\text{число наборов путей,} \\ \text{отвеч. перест. } w\end{pmatrix}$$

$$= \sum (\operatorname{sgn} w) \cdot P(A_1 \to B_{w(1)}) \cdot P(A_2 \to B_{w(2)}) \dots P(A_c \to B_{w(c)})$$

$$= \det\left(P(A_i \to B_j)\right)_{i,j=1}^{c} = \begin{vmatrix} P(A_1 \to B_1) & P(A_1 \to B_2) & \dots & P(A_1 \to B_c) \\ P(A_2 \to B_1) & P(A_2 \to B_2) & & \vdots \\ \dots & & & \vdots \\ P(A_c \to B_1) & \dots & \dots & P(A_c \to B_c) \end{vmatrix}$$

Теорема. $\mathbb{P}(a,b,c) = \det\left(\binom{a+b}{b+j-i}\right)_{i,j=1}^{c} =$

$$= \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \dots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \binom{a+b}{b-c+1} & \binom{a+b}{b-c+2} & \dots & \binom{a+b}{b} \end{vmatrix}$$

Детерминантное выраж. для числа плоских разбиений в $a\times b\times c$.

Следствие: $\mathbb{P}(a,b,c) = \det\binom{a+b+i-1}{b+j-1} =$

$$= \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \dots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \dots & \binom{a+b+1}{b+c-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \dots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{vmatrix}.$$

Д-во 1 Алгебр.: манип. со строками

Д-во 2: комбин.

Удлиним пути.

Лемма Линдстрёма-Гесселя-Вьенно: подсчет числа непер/пес путей в виде det.

Напоминание: $a^{\downarrow n} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)$

$a^{\downarrow a} = a!$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\downarrow k}}{k!} = \frac{n^{\downarrow k}}{k^{\downarrow k}}.$$

Вычисление определителя.

Лемма 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_n^2 \\ \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Лемма 2.

$$\Delta(x_1 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\downarrow 2} & x_2^{\downarrow 2} & & x_n^{\downarrow 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\downarrow n-1} & x_2^{\downarrow n-1} & \cdots & x_n^{\downarrow n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Лемма 3. Пусть $P_i(x) = x^{i-1} + \ldots$

Тогда $\det\left(P_i(x_j)\right) = \Delta(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$

$$\mathbb{P}(a,b,c) = \det\left[\binom{a+b+i-1}{b+j-1}\right]_{i,j=1}^{c} \overset{\star}{=}$$

$$\left(\binom{a+b+i-1}{b+j-1} = \frac{(a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1}}{(b+j-1)!}\right)$$

$$\overset{\star}{=} \frac{1}{b!\,(b+1)!\cdots(b+c-1)!} \det\left((a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1}\right).$$

$$(a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} = (a+b+i-1)^{\downarrow b}\,(a+i-1)^{\downarrow j-1}$$

$$= \frac{(a+b)^{\downarrow b}(a+b+1)^{\downarrow b}\cdots(a+b+c-1)^{\downarrow b}}{b!\,(b+1)!\cdots(b+c-1)!}\det\left(\left((a+i-1)^{\downarrow j-1}\right)\right)_{i,j=1}^{c}$$

$$= \prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)^{\downarrow b}}{(b+i-1)!}\cdot\Delta(a, a+1, a+2, \dots a+c-1)$$

$$\Delta(a, a+1, a+2, \dots a+c-1) = \underbrace{1\cdots 1}_{c-1}\cdot\underbrace{2\cdots 2}_{c-2}\cdot\underbrace{3\cdots 3}_{c-3}\cdots(c-1) =$$

$$= 1!\,2!\,3!\dots(c-1)!$$

$$P(a,b,c) = \prod_{j=1}^{c}\frac{(j-1)!\cdot(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} = \prod_{j=1}^{c}\frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}}$$

$$(a+b+j-1)^{\downarrow b} = (a+b+j-1)\dots(a+j)$$

$$(b+j-1)^{\downarrow b} = (b+j-1)\dots j$$

$$= \prod_{i=1}^{b}\prod_{j=1}^{c}\frac{a+i+j-1}{i+j-1}.$$

$$\frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \frac{a+i+j-1}{a+i+j-2}\cdot\frac{a+i+j-2}{a+i+j-3}\cdots\frac{i+j}{i+j-1}$$

$$= \prod_{k=1}^{a}\prod_{i=1}^{b}\prod_{j=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Теор. (формула Макмагона):

$$P(a,b,c) = \prod_{i=1}^{b} \prod_{j=1}^{c} \frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

$$P_q(a,b,c) = \sum_{\lambda \subset a\times b\times c} q^{|\lambda|}$$

λ = трехм. диагр. Юнга в $a\times b\times c$.

$$P_q(a,b,1) = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}.$$

Теор. (Макмагон) $$P_q(a,b,c) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c} \frac{[i+j+k-1]}{[i+j+k-2]}$$

$$[\alpha]_q = \frac{1-q^{\alpha}}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^{\alpha-1}.$$

Упр. $$P_q(\infty,\infty,\infty) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

(д-ть).

формула Макмагона.