ЛЕКЦИЯ 1

Аннотация. Гомологии графов.

Напомним, что *граф* — топологическое пространство, полученное из некоторого множества отрезков путем какого-нибудь отождествления их концов. Отрезки называются ребрами, классы эквивалентности концов — вершинами. Граф называется конечным, если он имеет конечное число ребер (и, следовательно, вершин).

Пусть Γ — граф, а R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей; свяжем с ними два свободных R-модуля $V_0(\Gamma, R)$ и $V_1(\Gamma, R)$, порожденных множествами вершин и ребер Γ соответственно. Выберем параметризацию ребер: для каждого ребра $e \subset \Gamma$ зафиксируем гомеоморфизм $\varphi_e : [0,1] \to e$, переводящий 0 и 1 в концы ребра (впрочем, по-другому и не бывает — докажите!). Теперь определим гомоморфизм модулей $\partial_\varphi : V_1(\Gamma) \to V_0(\Gamma)$ следующим образом: если $e \in V_1(\Gamma)$ — ребро (т.е. образующая модуля), то $\partial_\varphi e = \varphi_e(1) - \varphi_e(0) \in V_0(\Gamma)$ (напомним, что R содержит элементы 1 и, следовательно, -1, так что запись имеет смысл).

Для гомоморфизма ∂_φ определен его образ $\operatorname{Im} \partial_\varphi = \{\partial_\varphi x \in V_0(\Gamma, R) \mid x \in V_1(\Gamma, R)\}$ и ядро $\operatorname{Ker} \partial_\varphi = \{x \in V_1(\Gamma, R) \mid \partial x = 0\}$; они являются подмодулями в V_0 и V_1 соответственно.

Определение 1. Модуль $H_1(\Gamma, R) = \operatorname{Ker} \partial_\varphi$ называется первыми гомологиями графа Γ с коэффициентами в кольце R.

Определение 2. Фактор-модуль $H_0(\Gamma, R) = V_0(\Gamma, R)/\operatorname{Im} \partial_\varphi$ называется нулевыми гомологиями графа Γ с коэффициентами в кольце R.

Пример 1. Пусть Γ — граф с двумя вершинами a и b и двумя ребрами: e_1 соединяет a и b, а e_2 — петля с началом и концом в b. Пусть параметризация φ такова, что $\varphi_{e_1}(0) = a$, $\varphi_{e_1}(1) = b$; от параметризации e_2 вычисления не зависят. Тогда $\partial_\varphi e_2 = 0$, и $\partial e_1 = b - a$, так что $\partial(xe_1 + ye_2) = xb - xa$.

Очевидно, условие $xe_1 + ye_2 \in \operatorname{Ker} \partial_\varphi$ эквивалентно $x = 0$; тогда $H_1(\Gamma, R)$ — свободный модуль, порожденный e_2 и изоморфный R. Образ $\operatorname{Im} \partial_\varphi \subset V_0(\Gamma, R)$ порожден $b - a$; как легко убедиться, $H_0(\Gamma, R) = V_0(\Gamma, R)/\operatorname{Im} \partial_\varphi$ изоморфно R. В качестве образующей можно взять, например, элемент a.

Теорема 1. *Гомологии H_0 и H_1 не зависят от выбора параметризаций φ ребер графа.*

Доказательство. Пусть e — произвольное ребро графа. Очевидно, достаточно доказать, что если заменить параметризацию φ ребра e параметризацией ψ, для которой $\psi(0) = \varphi(1)$ и $\psi(1) = \varphi(0)$, а параметризации остальных ребер оставить прежними, то гомологии не изменятся.

Определим гомоморфизм $A : V_1(\Gamma, R) \to V_1(\Gamma, R)$ равенствами $Ae = -e$ и $Ae' = e'$ для всех ребер $e' \neq e$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1(\Gamma, R) & \xrightarrow{\partial_\varphi} & V_0(\Gamma, R) \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \\ V_1(\Gamma, R) & \xrightarrow{\partial_\psi} & V_0(\Gamma, R) \end{array}$$

коммутативна. Отсюда вытекает (докажите!), что $A(\operatorname{Ker} \partial_\varphi) \subset \operatorname{Ker} \partial_\psi$, а поскольку оператор A сам себе обратен, то и наоборот — следовательно, A является изоморфизмом модулей $\operatorname{Ker} \partial_\varphi = \operatorname{Ker} \partial_\psi = H_1(\Gamma, R)$. Из коммутативности также вытекает, что $\operatorname{Im} \partial_\varphi = \operatorname{Im} \partial_\psi$, откуда вытекает, что H_0 не зависит от параметризации. $\square$

Мы будем при вычислении гомологий опускать индекс φ у оператора ∂.

Теорема 2. *$H_0(\Gamma, R)$ — свободный R-модуль, порожденный компонентами линейной связности графа* Γ.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1} x_i v_i \in V_1(\Gamma, R)$, где $x_1, \dots, x_N \in R$, а $v_1, \dots, v_N$ — попарно различные вершины графа Γ. Для произвольной компоненты связности $\Gamma_j \subset \Gamma$ обозначим $s_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v_i \in \Gamma_j} x_i$. Из определения оператора ∂ следует, что если $x \in \operatorname{Im} \partial$, то $s_j(x) = 0$ для любого j. Докажем обратное: пусть $s_j(x) = 0$ для всех j, и пусть $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ — все вершины графа Γ, лежащие в компоненте Γ_j. Для каждого $k = 1, \dots, m-1$ существует путь $e_{1,k}, \dots, e_{m_k,k}$, соединяющий эти вершины, т.е. последовательность ребер, в которой начальная вершина ребра номер i совпадает при всяком $i \geq 2$ с конечной вершиной ребра номер $i-1$; начальная вершина первого ребра — v_{i_k}, а конечная вершина последнего ребра — v_{i_m}. Тогда $x' \stackrel{\text{def}}{=} x + x_{i_k} \partial(e_{1,k} + \dots + e_{m_k,k})$ принадлежит тому же классу смежности, что и x, при этом не содержит слагаемого с v_{i_k}, и коэффициенты при всех слагаемых, кроме v_{i_m}, такие же, как в x. Кроме того, $s_j(x') = s_j(x) = 0$ для всякого j.

Применяя эту процедуру ко всем $k = 1, \dots, m-1$, получим элемент y, принадлежащий тому же классу смежности, что и x, и имеющий единственное слагаемое $x_* = zv$, где вершина $v = v_{i_m}$ принадлежит компоненте связности Γ_j. Но тогда $s_j(x_*) = z = 0$, так что вершины компоненты Γ_j в x_* не входят. Повторяя это для всех компонент связности графа Γ (вершины которых имеются в элементе x), получим, что в классе смежности x есть 0, то есть $x = \partial y$ для некоторого $y \in V_1(\Gamma, R)$.

Отображение $x \mapsto (s_j(x) \mid \Gamma_j$— компонента связности $\Gamma)$ — эпиморфизм (почему?) $V_0(\Gamma, R)$ в прямую сумму R, слагаемые которой пронумерованы компонентами связности Γ. Как только что было доказано, ядро этого гомоморфизма совпадает с $\operatorname{Im} \partial$, откуда и вытекает, что образ изоморфен $H_0(\Gamma, R)$. $\square$

Непрерывное отображение графов $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ назовем клеточным (происхождение названия мы объясним позднее), если оно переводит вершины Γ_1 в вершины Γ_2.

Лемма 1. *Всякое непрерывное отображение графов $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ гомотопно клеточному.*

Для доказательства (подробности которого мы оставим в качестве упражнения) нужно для произвольной вершины v графа Γ_1 построить отображение $g : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, гомотопное f и такое, что $g(v)$ — вершина графа Γ_2 и $g(w) = f(w)$ для всех вершин $w \neq v$ графа Γ_1.

Если отображение f — клеточное, то положим по определению $f_{\sharp,0}(a) \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \in V_0(\Gamma_2, R)$ (образующая) для произвольной вершины (образующей) $a \in V_0(\Gamma_1, R)$; тем самым определен гомоморфизм $f_{\sharp,0} : V_0(\Gamma_1, R) \to V_0(\Gamma_2, R)$.

Пусть теперь e — ребро Γ_1 (т.е. образующая $V_1(\Gamma_1, R)$), а h — ребро Γ_2. Определим число $c_f(e, h) \in \mathbb{Z}$ следующим образом: пусть $p_h : \Gamma_2 \to \Gamma_2/(\Gamma_2 \setminus h)$ — каноническая проекция. Очевидно (почему?), что фактор в правой части гомеоморфен окружности S^1, причем можно считать, что при гомеоморфизме дополнение к ребру h переходит в отмеченную точку $a \in S^1$. Тогда композиция $g_f \stackrel{\text{def}}{=} p_h \circ f \circ \varphi_e$ (где $\varphi_e : [0,1] \to \Gamma_1$ — параметризация ребра e) — непрерывное отображение $[0,1] \to S^1$, переводящее концы отрезка $[0,1]$ в отмеченную точку. Тогда $c_f(e, h) \in \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, a)$ — элемент, представляемый отображением g_f.

Положим теперь по определению $f_{\sharp,1}(e) = \sum_h c_f(e, h) \cdot 1 \cdot h$, где $1 \in R$ — единица кольца, а сумма берется по всем ребрам графа Γ_2 (если граф Γ_2 бесконечный, то только по ребрам, целиком лежащим в образе $f(e) \subset \Gamma_2$ — по соображениям компактности таких конечное число, а для остальных, как нетрудно видеть, все равно $c_f(e, h) = 0$).

Теорема 3. 1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V_1(\Gamma_1, R) & \xrightarrow{\partial_{\Gamma_1}} & V_0(\Gamma_1, R) \\ f_{\sharp,1} \downarrow & & f_{\sharp,0} \downarrow \\ V_1(\Gamma_2, R) & \xrightarrow{\partial_{\Gamma_2}} & V_0(\Gamma_2, R) \end{array}$$

коммутативна.

2. *Если $g : \Gamma_2 \to \Gamma_3$ — клеточное отображение, то*

$$(g \circ f)_{\sharp,i} = g_{\sharp,i} \circ f_{\sharp,i} \quad i = 0, 1. \tag{1}$$

Доказательство. При доказательстве утверждения 1 предположим для простоты, что графы Γ_1 и Γ_2 локально конечны (избавиться от этого предположения — хорошее упражнение). Пусть v — произвольная вершина Γ_2, и $h_1, \dots, h_N$ — выходящие из нее ребра; выберем параметризацию φ такой, чтобы $v = \varphi_{h_i}(0)$ для всех $i = 1, \dots, N$. Пусть $f : [0,1] \to \Gamma_2$ — клеточное отображение; тогда для доказательства достаточно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{N} c_f([0,1], h_i) = \begin{cases} 0, & f(0) \neq v \neq f(1), \\ 0, & f(0) = v = f(1), \\ 1, & f(0) = v \neq f(1) \\ -1, & f(0) \neq v = f(1). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть Γ — граф Γ_2, в котором стянуты в точку w все точки, кроме объединения ребер $h_1, \dots, h_N$. Как нетрудно видеть, Γ — граф с двумя вершинами v и w, которые соединяются ребрами $h_1, \dots, h_N$. Пусть $q : \Gamma_2 \to \Gamma$ — отображение факторизации, а $p_i : \Gamma \to \Delta_i$ — отображение факторизации, где $\Delta_i \cong S^1$ — результат стягивания в Γ всех ребер, кроме h_i. Тогда $c_f([0,1], h_i) = \deg(p_i \circ q \circ f)$, где $p_i \circ q \circ f : [0,1] \to S^1$ — отображение, переводящее 0 и 1 в отмеченную точку окружности (образ v и w при отображении факторизации). Тем самым значение суммы в левой части равенства (2) зависит только от $q \circ f$, и можно без ограничения общности считать, что $\Gamma_2 = \Gamma$.

Пусть $f(0) \neq v \neq f(1)$; тогда в силу клеточности $f(0) = w = f(1)$. Нетрудно видеть, что отображение, сопоставляющее отображению $f : [0,1] \to \Gamma$ сумму $\sum_{i=1}^{N} c_f([0,1], h_i)$ — гомоморфизм групп $\xi : \pi_1(\Gamma, w) \to \mathbb{Z}$. Для всякого $i = 1, \dots, N-1$ ребра h_i и h_N графа Γ образуют окружность. Обозначим α_i образующую ее фундаментальной группы; нетрудно видеть, что $\pi_1(\Gamma, w)$ — свободная группа с образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$. Для α_i имеем $c_{\alpha_i}([0,1], h_i) = 1$, $c_{\alpha_i}([0,1], h_N) = -1$ и $c_{\alpha_i}([0,1], h_j) = 0$ для прочих j, так что $\xi(\alpha_i) = 0$.

Поскольку $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ — образующие фундаментальной группы, гомоморфизм ξ нулевой, что и доказывает первое равенство в (2). Доказательство остальных трех равенств — несложное упражнение (они сводятся к первому).

Второе утверждение теоремы очевидно при $i = 0$; при $i = 1$ оно вытекает (как?) из такого утверждения: если $\beta, \gamma : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, то $\deg(\beta \circ \gamma) = \deg \beta \cdot \deg \gamma$. $\square$

Из теоремы вытекает, что для всякого клеточного отображения $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ определены гомоморфизмы гомологий $f_{*,i} : H_i(\Gamma_1, R) \to H_i(\Gamma_2, R)$, $i = 0, 1$, обладающие свойством (1). Действительно, если $x \in \operatorname{Ker} \partial_1 = H_1(\Gamma_1, R)$, то $\partial_2(f_{\sharp,1}(x)) = f_{\sharp,0}(\partial_1 x) = f_{\sharp,0}(0) = 0$ — таким образом, $f_{\sharp,1}$ отображает $\operatorname{Ker} \partial_1 = H_1(\Gamma_1, R)$ в $\operatorname{Ker} \partial_2 = H_1(\Gamma_2, R)$. С другой стороны, если $y \in H_0(\Gamma_1, R) = V_0(\Gamma_1, R)/\operatorname{Im} \partial_1$ — класс смежности, содержащий элемент $Y \in V_0(\Gamma_1, R)$, то положим по определению: $f_{*,0}(y) \in H_0(\Gamma_2, R)$ — класс, содержащий элемент $f_{\sharp,0}(Y)$. Если Y заменить другим представителем того же класса, $Y' = Y + v$, где $v \in \operatorname{Im} \partial_1$, то есть $Y' = Y + \partial_1 w$ для некоторого $w \in V_1(\Gamma_1, R)$, то $f_{\sharp,0}(Y') = f_{\sharp,0}(Y) + \partial_2 f_{\sharp,1}(w)$ принадлежит тому же классу смежности (то есть элементу $H_0(\Gamma_2, R)$, что и $f_{\sharp,0}(Y)$ — тем самым отображение гомологий $f_{*,0}$ определено корректно. Теперь нужно доказать, что $f_{*,i} : H_i(\Gamma_2, R) \to H_i(\Gamma_2, R)$ — гомоморфизмы R-модулей и удовлетворяют свойству (1); оставим это в качестве несложного упражнения.

Пусть теперь $f_t : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, $0 \le t \le 1$, — гомотопия, причем отображения f_0 и f_1 — клеточные. Для произвольной вершины v графа Γ_1 положим по определению $K_v(t) = f_t(v)$; тогда $K_v : [0, 1] \to \Gamma_2$ — клеточное отображение (где $[0, 1]$ — граф с двумя вершинами и соединяющим их ребром).

Лемма 2. $(f_1)_{\sharp,0}(v) - (f_0)_{\sharp,0}(v) = \partial_2 (K_v)_{\sharp,1}([0, 1])$.

Доказательство. Согласно свойству 1 теоремы 3, $\partial_2 (K_v)_{\sharp,1}([0, 1]) = (K_v)_{\sharp,0}(\partial[0, 1]) = (K_v)_{\sharp,0}(1) - (K_v)_{\sharp,0}(0) = f_1(v) - f_0(v) = (f_1)_{\sharp,0}(v) - (f_0)_{\sharp,0}(v)$. $\square$

Теорема 4. *Гомоморфизмы $(f_0)_{*,i} : H_i(\Gamma_1, R) \to H_i(\Gamma_2, R)$ и $(f_1)_{*,i} : H_i(\Gamma_1, R) \to H_i(\Gamma_2, R)$ ($i = 0, 1$) совпадают.*

Доказательство. При $i = 0$ утверждение теоремы вытекает из леммы 2: элементы $(f_1)_{\sharp,0}(v) \in V_0(\Gamma_2, R)$ и $(f_0)_{\sharp,0}(v) \in V_0(\Gamma_2, R)$ отличаются на элемент образа оператора ∂_2.

При $i = 1$ из гомотопической инвариантности степени отображения окружностей вытекает, что $c_{f_1}(e, h) = c_{f_0}(e, h)$ для произвольных ребер e графа Γ_1 и h графа Γ_2. Отсюда получается, что $(f_0)_{\sharp,1}(e) = (f_1)_{\sharp,1}(e)$ для всякого ребра e и, следовательно, $(f_0)_{*,1} = (f_1)_{*,1}$ на $H_1(\Gamma_1, R) \subset V_1(\Gamma_1, R)$. $\square$

Теорема 5. *Гомологии гомотопически эквивалентных графов изоморфны.*

Доказательство. Пусть $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ и $g : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ — гомотопическая эквивалентность, то есть непрерывные отображения такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\Gamma_1}$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_{\Gamma_2}$ соответственно. Согласно лемме 1, можно без ограничения общности считать отображения f и g клеточными. Тогда гомоморфизмы f_* и g_* в гомологиях (второй индекс $i = 0, 1$ произвольный, так что опускаем его) обладают свойством $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ (по свойству 2 теоремы 3) $= (\mathrm{id}_{\Gamma_1})_* = \mathrm{id}$ и, аналогично, $f_* \circ g_* = \mathrm{id}$. Это означает, что f_* и g_* — взаимно обратные изоморфизмы гомологий. $\square$

Следствие 1. *Если Γ — конечный граф с n вершинами, m ребрами и ℓ компонентами линейной связности, то $H_1(\Gamma, R)$ изоморфно $R^{\ell - n + m}$.*

Доказательство. Γ гомотопически эквивалентен графу Δ — несвязному объединению ℓ букетов окружностей, общее количество окружностей в которых равно $\ell - n + m$ (это одна из задач листков курса “Топология-1”). Оператор $\partial_\Delta : V_1(\Delta, R) \to V_0(\Delta, R)$ — нулевой (поскольку все ребра Δ — петли), поэтому $H_1(\Delta, R) = V_1(\Delta, R) = R^{\ell - n + m}$. $\square$

Следствие 2 (следствия 1). *У гомотопически эквивалентных графов разности количеств ребер и вершин совпадают.*