ЛЕКЦИЯ 3

Аннотация. Гомотопическая инвариантность сингулярных гомологий. Теорема Бокштейна (без доказательства, доказательству посвящен один из семинаров). Последовательность Майера–Вьеториса — формулировка.

Начнем с алгебраического утверждения. Пусть $A = \dots \xrightarrow{\partial_3^A} A_2 \xrightarrow{\partial_2^A} A_1 \xrightarrow{\partial_1^A} A_0 \to 0$ и $B = \dots \xrightarrow{\partial_3^B} B_2 \xrightarrow{\partial_2^B} B_1 \xrightarrow{\partial_1^B} B_0 \to 0$ — цепные комплексы K-модулей. *Цепной гомотопией* между ними называется набор гомоморфизмов модулей $K_n : A_n \to B_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$.

Лемма 1. *Набор гомоморфизмов $f_n = \partial_{n+1}^B \circ K_n + K_{n-1} \circ \partial_n^A : A_n \to B_n$ является морфизмом комплексов (то есть коммутирует с дифференциалами). Отображение $f_{*,n} : H_n(A) \to H_n(B)$ — нулевое.*

Доказательство. При вычислениях будем опускать индекс. Тогда $f = \partial K + K\partial$, откуда $\partial f = \partial^2 K + \partial K \partial = \partial K \partial$ и $f\partial = \partial K \partial + K\partial^2 = \partial K \partial = \partial f$, то есть f — морфизм.

Если $x \in Z_n$ (является циклом), то есть $\partial x = 0$, то $f(x) = \partial K x + K \partial x = \partial K x \in B_n$ (является границей), то есть $f_* = 0$. □

Теорема 2. *Пусть $f_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$ — гомотопия отображений между топологическими пространствами. Тогда $(f_0)_* = (f_1)_*$ (гомоморфизмы в гомологиях).*

Следствие 3. *Гомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Доказательство следствия 3. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — гомотопическая эквивалентность: $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. Тогда согласно теореме 2, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H(X)}$; аналогично $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{H(Y)}$. Тем самым $f_* : H(X) \to H(Y)$ и $g_* : H(Y) \to H(X)$ — взаимно обратные изоморфизмы. □

Пример 4. Шар $B_n \subset \mathbb{R}^n$ стягиваем, т.е. гомотопически эквивалентен точке. Отсюда $H_0(B_n) = K$ и $H_i(B_n) = 0$ при всех $i > 0$.

Для доказательства теоремы 2 мы построим цепную гомотопию $K : C(X) \to C(Y)$ сингулярных комплексов пространств X и Y, для которой

$$\partial^Y K + K \partial^X = (f_0)_\# - (f_1)_\#, \tag{1}$$

и воспользуемся леммой 1.

Для построения гомоморфизма $K_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ нам понадобится геометрическая конструкция — разбиение призмы на симплексы. Обозначим $Q_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta_n \times [0,1]$ (призма), где Δ_n — стандартный симплекс. Для произвольного k, $0 \le k \le n$, обозначим $Q_{n,k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n, t) \mid (x_0. \dots .x_n) \in \Delta_n, x_0 + \dots + x_{k-1} \le t \le x_0 + \dots + x_k\}$ (при $k = 0$ в левой части неравенства стоит 0, а при $k = n$ в правой — $x_0 + \dots + x_n = 1$).

Прежде всего докажем, что $Q_{n,k}$ — $(n+1)$-мерный симплекс. Для этого построим взаимно однозначное аффинное отображение $\chi_{n,k} : \Delta_{n+1} \to Q_{n,k}$. Для этого для кажждой точки $y = (y_0, \dots, y_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$ найдем координаты точки $(x_0, \dots, x_n, t) = \chi_{n,k}(y) \in Q_{n,k}$ такие, что

$$\begin{aligned}
&y_0 = x_0,\\
&y_0 + y_1 = x_0 + x_1,\\
&\dots\\
&y_0 + \dots + y_{k-1} = x_0 + \dots + x_{k-1},\\
&y_0 + \dots + y_k = t,\\
&y_0 + \dots + y_{k+1} = x_0 + \dots + x_k,\\
&\dots\\
&y_0 + \dots + y_n = x_0 + \dots + x_{n-1},
\end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0, \\ &\dots \\ &y_{k-1} = x_{k-1}, \\ &y_k = t - (x_0 + \dots + x_{k-1}), \\ &y_{k+1} = (x_0 + \dots + x_k) - t, \\ &y_{k+2} = x_{k+1}, \\ &\dots, \\ &y_{n+1} = x_n \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} &x_0 = y_0, \\ &\dots \\ &x_{k-1} = y_{k-1}, \\ &x_k = y_k + y_{k+1}, \\ &x_{k+1} = y_{k+2}, \\ &\dots, \\ &x_n = y_{n+1}, \\ &t = y_0 + \dots + y_k. \end{aligned}$$

Поскольку выражение x, t через y линейно и обратимо, $\chi_{n,k}$ — действительно взаимно однозначное аффинное отображение.

Переобозначим $F(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_t(x)$, так что $F : X \times [0,1] \to Y$, и пусть $\varphi : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс. Для произвольного числа $k = 0, \dots, n$ положим по по определению $\xi_{n,k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k}$, и определим сингулярную цепь $K_n(\varphi) = \xi_{n,0} - \xi_{n,1} + \dots \pm \xi_{n,n} \in C_{n+1}(Y)$; после этого продолжим отображение K_n до гомоморфизма $K_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что определенная выше цепная гомотопия $K : C(X) \to C(Y)$ удовлетворяет уравнению (1).

Пусть $\iota_{n,j} : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ — аффинная параметризация грани, заданная формулой $\iota_{n,j}(y_0, \dots, y_n) = (y_0, \dots, y_{j-1}, 0, y_j, \dots, y_n)$ (нуль на j-м месте); здесь $0 \le j \le n$. Тогда по определению дифференциала в сингулярном комплексе имеем

$$\partial^Y_{n+1} K_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{j+k} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,j}$$

(2) и

$$K_{n-1}(\partial^X_n \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+k} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ (\iota_{n,j} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k}.$$

Непосредственная проверка показывет (убедитесь!), что имеют место следующие соотношения между аффинными отображениями $\chi_{n,k}$ и $\iota_{n,j}$:

$$\begin{aligned} &\chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,j} = (\iota_{n,j} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k-1} \quad \text{при } j < k, \\ &\chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,j} = (\iota_{n,j-1} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k} \quad \text{при } j > k+1, \\ &\chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,k} = \chi_{n,k-1} \circ \iota_{n+1,k} \quad \text{при } 1 \le k \le n, \\ &\chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,k+1} = \chi_{n,k+1} \circ \iota_{n+1,k+1} \quad \text{при } 0 \le k \le n-1, \\ &\chi_{n,0} \circ \iota_{n+1,0} = \mathrm{id} \times 0, \\ &\chi_{n,n} \circ \iota_{n+1,n+1} = \mathrm{id} \times 1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\partial^Y_{n+1} K_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+k} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ (\iota_{n,j} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k-1} + \sum_{j=k+2}^{n} (-1)^{j+k} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ (\iota_{n,j-1} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k}$$

(3)

$$+ F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k} \circ \iota_{n+1,k} - F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k+1} \circ \iota_{n+1,k} \Bigg)$$

и

$$K_{n-1}(\partial^X_n \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k-1} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ (\iota_{n,j} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k-1} + \sum_{j=k+2}^{n} (-1)^{j+k-1} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ (\iota_{n,j-1} \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n-1,k} \Bigg)$$

(в первой из формул (2) замена индекса суммирования $k-1 \mapsto k$, во второй $j+1 \mapsto j$). Тем самым $K_{n-1}(\partial^X_n \varphi)$ равна, с противоположным знаком, сумме первых двух слагаемых в (3). Заменяя в последнем слагаемом той же формулы $k+1 \mapsto k$, получим

$$\begin{aligned} \partial^Y_{n+1} K_n(\varphi) + K_{n-1}(\partial^X_n \varphi) &= \sum_{k=0}^{n} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k} \circ \iota_{n,k} - \sum_{k=1}^{n+1} F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,k-1} \circ \iota_{n,k} \\ &= F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,0} \circ \iota_{n,0} - F \circ (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \chi_{n,n} \circ \iota_{n,n+1} \\ &= (f_0)_\#(\varphi) - (f_1)_\#(\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

Тем самым мы доказали, что для всякого соответствие $X \mapsto H_n(X,R)$, $f \mapsto f_*$ является функтором из гомотопической категории в категорию R-модулей. Разумеется, то же самое верно, с очевидными изменениями (какими?) для когомологий.

Чтобы воспользоваться гомотопической инвариантностью для вычисления гомологий более сложных (не стягиваемых) пространств, мы применим алгебраическую технику, называемую теоремой Бокштейна. Рассмотрим точную последовательность $0 \to A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0$, где A, B, C — комплексы R-модулей, а p, q — морфизмы комплексов. Иными словами, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial^A_{n+2}} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial^A_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial^A_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial^A_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p_n & & \downarrow p_{n-1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial^B_{n+2}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial^B_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial^B_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial^B_{n-1}} & \dots, \\
 & & \downarrow q_{n+1} & & \downarrow q_n & & \downarrow q_{n-1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial^C_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial^C_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial^C_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial^C_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

в котором горизонтальные строки — комплексы ($\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ при всех $n \ge 1$), а вертикальные — точные последовательности (комплексы с нулевыми гомологиями): $\operatorname{Ker} p_n = 0$, $\operatorname{Ker} q_n = \operatorname{Im} p_n$, $\operatorname{Im} q_n = C_n$ для всех $n \ge 0$.

В этой ситуации при $n \ge 1$ определен гомоморфизм модулей $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$. А именно, пусть $x \in Z_n(C) = \operatorname{Ker} \partial^C_n$ — представитель класса гомологий $h \in H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$. В силу равенства $\operatorname{Im} q_n = C_n$ существует элемент $y \in B_n$ такой, что $q_n(y) = x$. В силу коммутативности диаграммы $q_{n-1}(\partial^B_n y) = \partial^C_n(q_n(y)) = \partial^C_n(x) = 0$, то есть $\partial^B_n(y) \in \operatorname{Ker} q_{n-1} = \operatorname{Im} p_{n-1}$. Тем самым существует элемент $z \in A_{n-1}$ такой, что $p_{n-1}(z) = \partial^B_n(y)$.

Докажем, что $\partial^A_{n-1} z = 0$, то есть $z \in Z_{n-1}(A)$. Действительно, в силу коммутативности диаграммы $p_{n-2}(\partial^A_{n-1} z) = \partial^B_{n-1}(p_{n-1}(z)) = \partial^B_{n-1}(\partial^B_n(y)) = 0$ (поскольку B — комплекс, то есть $\partial^B_{n-1} \circ \partial^B_n = 0$). Но $\operatorname{Ker} p_{n-2} = 0$, так что из $p_{n-2}(\partial^A_{n-1} z) = 0$ вытекает $\partial^A_{n-1} z = 0$.

Тогда положим по определению $\delta_n(h) \in H_{n-1}(A) = Z_{n-1}(A)/B_{n-1}(A)$ — класс, содержащий элемент z.

Теорема 5 (теорема Бокштейна)**.** *Гомоморфизм $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ корректно определен, т.е. $\delta_n(h)$ не зависит от выбора представителя x класса h, и является гомоморфизмом модулей. Последовательность модулей и гомоморфизмов*

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{p_{*,n}} H_n(B) \xrightarrow{q_{*,n}} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{p_{*,n-1}} \dots$$

— точная.

Доказательству теоремы Бокштейна посвящен семинар 3.

Пусть X — топологическое пространство, а $Y \subseteq X$ — подпространство (с индуцированной топологией). Символом $\iota^X_Y : Y \to X$ обозначим тавтологическое вложение: если $y \in Y$, то $\iota^X_Y(y) = y$ (но уже как элемент X!).

Пусть $A, B \subset X$ — открытые подмножества, $A \cup B = X$. Рассмотрим последовательность комплексов:

$$0 \to C(A \cap B) \xrightarrow{u} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{v} C(X), \tag{4}$$

где $u = (\iota^A_{A\cap B})_\# \oplus (\iota^B_{A\cap B})_\#$ и $v = (\iota^X_A)_\# \circ p_1 - (\iota^X_B)_\# \circ p_2$, а $p_1, p_2 : C(A) \oplus C(B) \to C(A), C(B)$ — проекции на первый и второй сомножитель соответственно.

Лемма 6. *Последовательность комплексов* (4) *точная. Образом v является комплекс $C^{A,B}(X) \subset C(X)$, n-е пространство которого — модуль, свободно порожденный n-мерными сингулярными симплексами $f : \Delta_n \to X$ такими, что $f(\Delta_n) \subset A$ или $f(\Delta_n) \subset B$.*

Доказательство. Точность в члене $C(A \cap B)$ (то есть инъективность u) очевидна (почему?). Точность в члене $C(A) \oplus C(B)$: для произвольного $f : \Delta_n \to A \cap B$ имеем $u(f) = f \oplus f \in C_n(A) \oplus C_n(B)$, откуда $v(u(f)) = v(f \oplus f) = f - f = 0$, то есть $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} v$. Для доказательства обратного включения пусть $y = \sum_{i=1}^N m_i f_i \oplus g_i \in C_n(A) \oplus C_n(B)$, где $f_i : \Delta_n \to A$ и $g_i : \Delta_n \to B$ — сингулярные симплексы, а $m_i \in R$ — коэффициенты. Среди $f_1, \dots, f_N$ могут быть одинаковые; избавимся от этого, собрав подобные члены по первой координате: $y = \sum_{i=1}^m f_i \oplus z_i$, где $f_1, \dots, f_m : \Delta_n \to X$ — попарно различные сингулярные симплексы, а $z_1, \dots, z_m \in C_n(B)$. Если $y \in \operatorname{Ker} v$, то $\sum_{i=1}^m f_i = \sum_{i=1}^m z_i \in C_n(X)$. Правая часть равенства лежит в $C_n(B)$, а поскольку среди $f_i : \Delta_n \to A$ нет равных, все они отображают Δ_n в B, то есть в $A \cap B$. Аналогично, $g_i(\Delta_n) \subset A \cap B$ при всех i — тем самым, $y \in \operatorname{Im} u$, и точность в члене $C(A) \oplus C(B)$ доказана.

Второе утверждение леммы очевидно. □

Следствие 7. *Последовательность комплексов* $0 \to C(A \cap B) \xrightarrow{u} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{v} C^{A,B}(X) \to 0$ *точна.*

Тем самым к этой последовательности применима теорема Бокштейна. Основным техническим результатом, позволяющим этой последовательностью пользоваться, является

Теорема 8. *Гомологии комплексов* $C^{A,B}(X)$ *и* $C(X)$ *совпадают.*

Следствие 9 (теоремы 8 и теоремы 5). *Для всякого топологического пространства* X *и его открытых подмножеств* A, B *таких, что* $A \cup B = X$, *существует точная последовательность гомологий* $\dots H_n(A \cap B) \xrightarrow{u_{*,n}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{v_{*,n}} H_n(X) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots \to H_0(X)$.

Последовательность из следствия 9 называется последовательностью Майера–Виеториса.