ЛЕКЦИЯ 5

Аннотация. Построение цепной гомотопии к барицентрическому подразделению и завершение доказательства того, что гомологии комплекса “малых” симплексов совпадают с сингулярными. Теорема Брауэра. Определение степени отображения и теорема о степени линейного отображения.

Докажем лемму 4 (и следствие 5) из лекции 3, для чего введем (или напомним) некоторые обозначения. Символом $\iota_{n,s} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ (где $0 \le s \le n$) обозначим, как раньше, аффинное отображение, переводящее стандартный симплекс Δ_{n-1} в s-ю грань стандартного симплекса Δ_n; в координатах оно выглядит как $\iota_{n,s}(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{s-1}, 0, x_s, \dots, x_n)$. Символом id_n обозначим тождественное отображение $\Delta_n \to \Delta_n$ (которое мы часто будем рассматривать как сингулярный симплекс), а символами $\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}}$ и $\mathrm{id}_n^{\mathbf{1}}$ — отображения $\Delta_n \to \Delta_n \times [0,1]$, действующие по правилу $\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}}(x) = (x, 0)$ и $\mathrm{id}_n^{\mathbf{1}}(x) = (x, 1)$ соответственно.

Если $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ — два отображения, то $f \times g : A \times B \to A' \times B'$ действует, по определению, как $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.

Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta_n \to \mathbb{R}^k$ и произвольной точки $a \in \mathbb{R}^k$ обозначим $a \cdot f : \Delta_{n+1} \to \mathbb{R}^k$ сингулярный симплекс — конус над f: $(a \cdot f)(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_0 a + (1 - x_0) f(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_0})$ ($(a \cdot f)(1, 0, \dots, 0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a$). В частности, если f — аффинное отображение, то $a \cdot f$ также аффинное. Как обычно, продолжим ооперацию $a\cdot$ до гомоморфизма модулей $C_n(\mathbb{R}^k) \to C_{n+1}(\mathbb{R}^k)$. Непосредственно из опредения дифференциала в сингулярном комплексе следует

Лемма 1. $a \cdot \partial + \partial a \cdot = \mathrm{id}$*, то есть* $\partial(a \cdot x) = f - a \cdot \partial x$ *для любой сингулярной цепи* $x \in C_n(\mathbb{R}^k)$.

Напомним, что в лекции 4 мы определили сингулярную цепь $\mathcal{B}_n \in C_n(\Delta_n)$ и гомоморфизм $\beta_n : C_n(X) \to C_n(X)$, действующий на образующие — сингулярные симплексы $f : \Delta_n \to X$ — как $\beta_n(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_\# \mathcal{B}_n$. Очевидно, $\mathcal{B}_0 = \mathrm{id}_0$ (сингулярный 0-мерный симплекс в точке); оказывается, цепь $\mathcal{B}_n$ теперь можно определить по индукции:

Лемма 2. $\mathcal{B}_{n+1} = a \cdot \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s})_\# \mathcal{B}_n$*, где* $a \stackrel{def}{=} (1/(n+1), \dots, 1/(n+1)) \in \Delta_n$ *— центр тяжести стандартного симплекса.*

Доказательство леммы — несложное упражнение.

Следствие 3. $\partial \mathcal{B}_n = a \cdot \sum_{s=0}^n (-1)^s (\iota_{n,s})_\# \mathcal{B}_{n-1}$.

Доказательство. Индукция по n; база $n = 0$ тривиальна. Теперь $\partial \mathcal{B}_{n+1} = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \partial(a \cdot (\iota_{n+1,s})_\# \mathcal{B}_n) = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \big((\iota_{n+1,s})_\# \mathcal{B}_n - a \cdot \partial \mathcal{B}_n\big)$ (согласно лемме 1) $= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s})_\# \mathcal{B}_n + \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{t=0}^n (-1)^{s+t} (\iota_{n+1,s})_\# (\iota_{n,t})_\# \mathcal{B}_{n-1}$. Поскольку $\iota_{n+1,s} \circ \iota_{n,t} = \iota_{n+1,t+1} \circ \iota_{n,s}$ при $s \le t$, вторая сумма равна нулю (ср. с доказательством леммы о $\partial^2 = 0$ в лекции 2). □

Определим теперь индукцией по n сингулярную цепь $L_n \in C_{n+1}(\Delta_n \times [0,1])$ следующим образом. При $n = 0$ положим $L_0 = f$, где $f : \Delta_1 \to [0,1] = \Delta_0 \times [0,1]$ — обратимое афинное отображение. Далее при всех $n \ge 0$ положим по определению

$$L_{n+1} = a \cdot \left(\sum_{s-0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s} \times \mathrm{id})_\# L_n - \mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{1}} \right),$$

где $a = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1); 0) \in \Delta_{n+1} \times [0,1]$ — центр тяжести нижнего основания призмы. Как нетрудно видеть, L_n — сумма с коэффициентами ± 1 инъективных аффинных отображений $\Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1]$, образы которых образуют разбиение призмы на симплексы, пересекающиеся только по граням. Для того, чтобы разбить призму $\Delta_n \times [0,1]$, нужно вначале разбить — по индукции — каждую ее боковую грань (естественно, на симплексы размерности n), а затем построить $(n+1)$-мерные симплексы, вершиной которых будет a, а основаниями — верхнее основание призмы и все симплексы, на которые разбиты боковые грани.

Основным комбинаторным фактом, необходимым для доказательства леммы 8 лекции 3, будет

Лемма 4. $\partial L_n = \sum_{t=0}^n (-1)^t (\iota_{n,t} \times \mathrm{id})_\# L_{n-1} + (\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}})_\# \mathcal{B}_n - \mathrm{id}_n^{\mathbf{1}}$.

Доказательство. Индукция по n; база $n = 0$ — упражнение. Шаг индукции: согласно лемме 1,$\partial L_{n+1} = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s} \times \mathrm{id})_\# L_n - \mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{1}} - a \cdot \big(\sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s} \times \mathrm{id})_\# \partial L_n - \partial\, \mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{1}} \big)$. По предположению индукции, последний член в формуле равен $a \cdot \big(\sum_{s=0}^{n+1} \sum_{t=0}^n (-1)^{s+t} (\iota_{n+1,s} \times \mathrm{id})_\# (\iota_{n,t} \times \mathrm{id})_\# L_{n-1} + \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s (\iota_{n+1,s} \times$

$\mathrm{id})_\#(\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}})_\#\mathcal{B}_n - \sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s(\iota_{n+1,s}\times\mathrm{id})_\#\,\mathrm{id}_n^{\mathbf{1}} - \partial\,\mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{1}}\big)$. Двойная сумма равна нулю по тем же соображениям, что в доказательстве следствия 3. Второе слагаемое, в силу очевидного равенства $(\iota_{n+1,s}\times\mathrm{id})\circ\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}} = \mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{0}}\circ\iota_{n+1.s}$, равно $(\mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{0}})_\# a\cdot\left(\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s(\iota_{n+1,s})_\#\mathcal{B}_n\right) = (\mathrm{id}_{n+1}^{\mathbf{0}})_\#\mathcal{B}_{n+1}$, согласно лемме 2. Оставшиеся два члена сокращаются по определению дифференциала в сингулярном комплексе. □

Пусть теперь $f : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс. Обозначим $p : \Delta_n\times[0,1]\to\Delta_n$ проекцию на первый сомножитель и положим по определению $K_n(f) = f_\# p_\# L_n \in C_{n+1}(X)$; затем продолжим K_b до гомоморфизма модулей $C_n(X)\to C_{n+1}(X)$.

Теорема 5. *Набор гомоморфизмов K_n удовлетворяет утверждению леммы 8 лекции 3: $K_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}K_n = \beta_n - 1$, и $K_n(C_n^{A,B}(X))\subset C_{n+1}^{A,B}(X)$ для всех n.*

Доказательство. $\partial K_n f = \partial(f\circ p)_\# L_n = (f\circ p)_\#\partial L_n = \sum_{t=0}^n(-1)^t(f\circ p)_\#(\iota_{n,t}\times\mathrm{id})_\# L_{n-1} + (f\circ p)_\#(\mathrm{id}_n^{\mathbf{0}})_\#\mathcal{B}_n - (f\circ p)_\#\,\mathrm{id}_n^{\mathbf{1}} = \sum_{t=0}^n(-1)^t(f\circ\iota_{n,t}\circ p)_\# L_{n-1} + f_\#\mathcal{B}_n - f = -K_{n-1}\partial f + \beta_n(f) - f$. Второе утверждение теоремы очевидно. □

Теорема 6 (теорема Брауэра)**.** *Непрерывное отображение $f : D_k\to D_k$ шара в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть это неверно: для всех $x\in D_k$ точки x и $f(x)$ не совпадают. Проведем через точку x луч с началом в точке $f(x)$ и обозначим $u(x)$ точку его пересечения с границей шара $\partial D_k = S^{k-1}$. Отображение u непрерывно (почему?) и, следовательно, является ретрацией $D_k\to\partial D_k$.

Пусть $\iota : S^{k-1}\to D_k$ — тавтологическое вложение сферы в шар в качестве границы. Тогда $u\circ\iota = \mathrm{id}_{S^{k-1}}$ и, следовательно, $u_*\circ\iota_* = \mathrm{id}_{H_{k-1}(S^{k-1})}$. Но шар D_k стягиваем и, следовательно, $H_{k-1}(D_k) = 0$, так что $\iota_* : H_{k-1}(S^{k-1})\to H_{k-1}(D_k)$ — нулевое отображение. Отсюда вытекает, что отображение $u_*\circ\iota_* = \mathrm{id}$ также нулевое, но это невозможно, т.к. $H_{k-1}(S^{k-1})\neq 0$. □

В дальнейшем в этой лекции коэффициенты в гомологиях $R=\mathbb{Z}$.

Для произвольного непрерывного отображения $f : S^n\to S^n$ определен гомоморфизм абелевых групп (т.е. $\mathbb{Z}$-модулей) $f_* : H_n(S^n)\to H_n(S^n)$. Как известно, $H_n(S^n)$ изоморфно $\mathbb{Z}$; выбор изоморфизма эквивалентен выбору одной из двух образующих в (свободной циклической) группе $H_n(S^n)$. Эта образующая при изоморфизме переходит в $1\in\mathbb{Z}$, а вторая — в -1. Тем самым, если образующие в гомологиях выбраны, f_* представляет собой гомоморфизм $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, то есть умножение на некоторое число $d\in\mathbb{Z}$, которое называется степенью отображения f: $d = \deg f$. В силу гомотопической инвариантности гомоморфизма f_* степени гомотопных отображений совпадают. Очевидно, степень тождественного отображения равна 1.

Пример 7. Вычислим степнь симметрии относительно экватора, т.е. отображения $\varrho : S^n\to S^n$, заданного равенством $\sigma(x_0,x_1,\dots,x_n) = (-x_0,x_1,\dots,x_n)$ (в качестве S^n мы берем сферу радиуса 1 с центром в начале координат: $S^n = \{(x_0,\dots,x_n)\mid x_0^2+\dots+x_n^2 = 1\}$). Для этого покроем сферу S^n множествами $U_1 = S^n\setminus\{a\}$, $U_2 = S^n\setminus\{b\}$, где $a = (1,0,\dots,0)$ и $b = (-1,0,\dots,0)$ — полюса сферы, и рассмотрим точную последовательность комплексов $0\to C(U_1\cap U_2)\to C(U_1)\oplus\acute{(}U_2)\to C^{U_1,U_2}(S^n)\to 0$. Отображение σ гомеоморфно отображает множества U_1 и U_2 друг в друга и тем самым порождает коммутативную (почему?) диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C(U_1\cap U_2) & \to & C(U_1)\oplus C(U_2) & \to & C^{U_1,U_2}(S^n) & \to & 0\\ & & \downarrow(\alpha_S)_* & & \downarrow(\alpha_S)_* & & \downarrow(\alpha_S)_* & & \\ 0 & \to & C(U_2\cap U_1) & \to & C(U_2)\oplus C(U_1) & \to & C^{U_2,U_1}(S^n) & \to & 0\end{array}.$$

Применяя к ней конструкцию из теоремы Бокштейна, получим коммутативную диаграмму последовательностей Майера–Виеториса; рассмотрим такой ее фрагмент:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_{12}} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & 0\\ & & \downarrow\times\deg\sigma & & \downarrow\mathrm{id} & & \\ 0 & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_{21}} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & 0\end{array}$$

($U_1\cap U_2$ деформационно ретрагируется на экватор сферы, гомеоморфный S^{n-1}). Здесь δ_{12} — связывающий гомоморфизм, построенный по покрытию U_1,U_2; из точности последовательности вытекает, что он является изоморфизмом.

В этой диаграмме левая вертикальная стрелка — отображение $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, состоящее в умножении на $\deg\sigma$ (по определению степени). Ограничение σ на экватор — тождественное отображение, так что правая вертикальная стрелка — тождественное отображение. Связывающий гомоморфизм δ_{21} в нижней строке строится по покрытию U_2,U_1. Из конструкции связывающего гомоморфизма в последовательности Майера–Виеториса вытекает (проверьте!), что $\delta_{21} = -\delta_{12}$. Из коммутативности диаграммы теперь следует, что $\deg\sigma = -1$ и, следовательно, $\deg\alpha_A = -1$.

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — невырожденное линейное отображение, и $\alpha_A : S^n \to S^n$ определено формулой $\alpha_A(x) = Ax/|Ax|$.

Теорема 8. $\deg \alpha_A = 1$*, если* $\det A > 0$*, и* $\deg \alpha_A = -1$*, если* $\det A < 0$*.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется

Лемма 9. *Группа* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *невырожденных линейных преобразований состоит из двух компонент линейной связности, одна из которых — подгруппа* $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ *преобразований с положительным определителем, а вторая — множество (класс смежности по* $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$*) преобразований с отрицательным определителем.*

Доказательство. Обозначим $V(n, n)$ (это традиционное обозначение, называется пространством Штифеля) множество базисов в пространстве $\mathbb{R}^n$; например, $e = (e_1, \dots, e_n) \in V(n, n)$ — стандартный базис ($e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица на k-м месте). Произвольному линейному оператору $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ поставим в соответствие базис $Ae = (Ae_1, \dots, Ae_n) \in V(n, n)$ (составленный из строк матрицы оператора A в стандартном базисе); очевидно, это взаимно однозначное соответствие $V(n, n) \leftrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Рассмотрим две операции над базисами: если $v = (v_1, \dots, v_n) \in V(n, n)$, то $I_{j,k,r}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \dots, v_k + rv_j, \dots, v_n)$ (вектор $v_k + rv_j$ стоит на k-м месте, т.е. к k-й строке матрицы прибавляют j-ю, умноженную на r), и $J_{j,k}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \dots, -v_k, \dots, v_j, \dots, v_n)$ (k-й и j-й векторы, т.е. k-я и j-я строки матрицы, меняются местами, причем первая меняет знак — это чтобы не менялся определитель). Базис v можно соединить непрерывной кривой в $V(n, n)$ с $I_{j,k,r}(v)$ и с $J_{j,k}(v)$: в первом случае $v(t) = (v_1, \dots, v_k + trv_j, \dots, v_n)$, во втором $v(t) = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_k \cos(\pi t/2) + v_j \sin(\pi t/2), \dots, v_n)$ — проверьте, что $v(t)$ — действительно базис для всякого $0 \le t \le 1$.

Известно, что любую матрицу можно привести к верхнетреугольному виду с помощью нескольких операций этих двух типов. Полученная верхнетреугольная матрица невырождена (мы все время движемся внутри $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$) и, следовательно, не имеет нулей на диагонали. Отсюда вытекает, что такими же преобразованиями ее можно превратить в диагональную с теми же элементами на диагонали. Тем самым мы доказали, что всякий базис $v \in V(n, n)$ лежит в одной компоненте линейной связности с базисом вида $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) \in V(n, n)$.

Такой базис можно соединить кривой (какой?) с базисом $(\varepsilon_1 e_1, \dots, \varepsilon_n e_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Определитель матрицы при этом изменится, но его знак — нет (поскольку набор строк всегда остается базисом, то есть определитель не равен нулю). Кроме того, применяя операцию $J_{j,k}$ два раза, можно сменить знак у ε_j и ε_k одновременно, не меняя остальных ε_i. Тем самым, в зависимости от четности числа минусов в $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ (т.е. от знака определителя исходной матрицы), мы получим кривую, соединяющую исходный базис либо со стандартным (если $\det A > 0$, либо с базисом $(-e_1, e_2, \dots, e_n)$ (если $\det A < 0$). □

Из леммы вытекает, что отображение α_A при $\det A > 0$ гомотопно отображению $\alpha_I = \mathrm{id}_{S^n}$, степень которого равна 1, а при $\det A < 0$ — отображению σ из примера 7, степень которого равна -1. □