ЛЕКЦИЯ 7

Аннотация. Относительные гомологии. Гомотопическая инвариантность. Точная последовательность пары и тройки. Теорема Борсука.

Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$, и $\iota \stackrel{\text{def}}{=} \iota_Y^X : Y \to X$ — тавтологическое вложение. Гомоморфизм $\iota_{\#,n} : C_n(Y,R) \to C_n(X,R)$ — очевидно, инъекция. Обозначим $C_n(X,Y,R) \stackrel{\text{def}}{=} C_n(X,R)/\iota_{\#,n}(C_n(Y,R))$, и пусть $p_n : C_n(X,R) \to C_n(X,Y,R)$ — стандартная проекция на фактор.

Лемма 1. *Существует и единствен набор гоморфизмов $\partial_{X,Y} : C_n(X,Y,R) \to C_{n-1}(X,Y,R)$, превращающий $C(X,Y,R)$ в комплекс (то есть $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$), а $p : C(X,R) \to C(X,Y,R)$ — в морфизм комплексов. Последовательность комплексов $0 \to C(Y,R) \xrightarrow{\iota_\#} C(X,R) \xrightarrow{p} C(X,Y,R) \to 0$ точная.*

Доказательство леммы — несложное упражнение. Комплекс $C(X,Y,R)$ называется относительным сингулярным комплексом (X по Y), а его гомологии $H(X,Y,R)$ — относительными гомологиями. Если $p_n(x) \in C_n(X,Y,R)$ — цикл (называется относительным циклом), то есть $\partial_{X,Y} p_n(x) = 0$, то $p_{n-1}(\partial x) = 0$, и из точности последовательности следует, что $\partial x = \iota_{n-1}(y)$ для некоторого $y \in C_{n-1}(Y,R)$. Иными словами, относительный цикл это цепь в x, граница которой лежит в Y.

По теореме Бокштейна, точной последовательности комплексов из леммы 1 соответствует точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X,Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y) \to \dots$, называемая точной последовательностью пары. Нетрудно видеть (убедитесь!), что связывающий гомоморфизм δ в этой последовательности сопоставляет относительному n-циклу, представленному n-цепью $x \in C_n(X,R)$, ее границу $\partial x \in C_{n-1}(Y,R)$.

Пример 2. Пусть $Y \subset X$ — точка; относительные гомологии $H_n(X,Y)$ называют в этом случае приведенными гомологиями X и обозначают $\tilde{H}_n(X)$. Из точной последовательности пары при $n \geq 2$ получаем $\dots \to 0 = H_n(\mathrm{pt}) \to H_n(X) \to \tilde{H}_n(X) \to H_{n-1}(\mathrm{pt}) = 0$, так что $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$. Хвост точной последовательности пары выглядит так: $0 = H_1(Y) \to H_1(X) \to \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{\delta} H_0(Y) = R \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$. Как известно, отображение $\iota_* : H_0(Y) \to H_0(X)$ является вложением R в свободный R-модуль, порожденный компонентами линейной связности пространства X; $\iota_*(1)$ — образующая, соответствующая компоненте линейной связности, содержащей точку Y. Из точности последовательности теперь вытекает, что $\delta = 0$, откуда $\tilde{H}_1(X) = H_1(X)$ и $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus R$; в частности $\tilde{H}_0(X) = 0$ для линейно связного X.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, где $n > 1$ (случай $n = 1$ разберите самостоятельно), $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, так что X стягиваемо, а Y гомотопически эквивалентно S^{n-1}. Тогда фрагмент точной последовательности пары (X,Y) в градуировке $m \neq 0, n$ выглядит так: $0 = H_m(\mathbb{R}^n) \to H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, откуда $H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$. При $m = n$ имеем $0 = H_n(\mathbb{R}^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = R \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$, откуда $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = R$, а гомоморфизм Бокштейна $\delta : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — изоморфизм. Поскольку $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ретрагируется на сферу S^{n-1} с центром в нуле, в качестве образующей в $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = R$ можно выбрать стандартную образующую $u_n \in H_{n-1}(S^{n-1})$ — закопеременную сумму граней $(n-1)$-мерного октаэдра (гомеоморфного S^{n-1}). Образующая $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = R$, тем самым, — произвольная n-цепь $x \in C_n(\mathbb{R}^n)$, граница которой равна u_n — например, можно взять $x = 0 \cdot u_n$, то есть (знакопеременную) сумму n-мерных симплексов, основания которых это грани октаэдра, а $(n+1)$-я вершина — начало координат.

Абсолютные гомологии тоже можно рассматривать как относительные: $H(X) = H(X, \varnothing)$.

Пусть $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ — пары топологических пространств. Непрерывное отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что $f(Y_1) \subset Y_2$, называется непрерывным отображением пар. Композиция отображений пар определяется как обычно. Тем самым возникает категория (топологическая категория пар), объекты которой — пары топологических пространств, а морфизмы — непрерывные отображения пар. Непрерывное отображение F пары $(X_1 \times [0,1], Y_1 \times [0,1])$ в пару (X_2, Y_2) называется гомотопией, соединяющей отображения пар $F|_{X_1 \times \{0\}}$ и $F|_{X_1 \times \{1\}}$. Как и для обычных отображений, существование гомотопии между данными отображениями пар — отношение эквивалентности, совместимое с композицией. Тем самым возникает гомотопическая категория пар, объекты которой — пары пространств (такие же, как в топологической категории пар), а морфизмы — классы гомотопической эквивалентности. Эквивалентные объекты в этой категории называются гомотопически эквивалентными парами.

Предупреждающий пример. Очевидно, что если пара (X_1, Y_1) гомотопически эквивалентна (X_2, Y_2), то X_1 гомотопически эквивалентна X_2, а Y_1 — Y_2. Но обратное неверно: гомотопической эквивалентности пространств X и Y по отдельности недостаточно для эквивалентности пар.

Пусть, например, $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n$, $Y_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а $Y_2 = S^{n-1}$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Пары (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) гомотопически не эквивалентны.

Действительно, пусть это не так, и $f : X_2 = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = X_2, g : X_2 = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = X_1$ — эквивалентность пар. Тогда $f(\mathbb{R}^n \setminus 0) \subset Y_2 = S^{n-1}$; в силу непрерывности $a \stackrel{\text{def}}{=} f(0) \in S^{n-1}$ (так что $f(\mathbb{R}^n) \subset S^{n-1}$). Пусть $f_r : S^{n-1} \to S^{n-1}$ — ограничение отображения f на сферу $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в начале координат, и пусть $d = \deg f_r$ — поскольку, очевидно, все f_r гомотопны друг другу, степень от r не зависит. При достаточно малом $r > 0$ образ $f(S_r^{n-1}) \subset S^{n-1}$ лежит в малой окрестности точки a и, следовательно, не совпадает со всей сферой: $\exists b\, f(S_r^{n-1}) \subset S^{n-1} \setminus \{b\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Но $\mathbb{R}^{n-1}$ стягиваемо, откуда f_r гомотопно отображению в точку, и его степень $d = 0$, то есть $f_{*,n-1} = 0$. Но $f \circ g|_{Y_2} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ гомотопно $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$, откуда $f_{*,n-1} \circ g_{*,n-1} = (f \circ g)_{*,n-1} = \mathrm{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$, что противоречит $f_{*,n-1} = 0$, т.к. гомологии $H_{n-1}(S^{n-1})$ ненулевые.

Имеет место

Теорема 4. *Относительные гомологии определяют функтор из гомотопической категории пар в категорию градуированных R-модулей.*

Упражнение 5. План доказательства теоремы: а) Пусть $f : X \to X'$ — непрерывное отображение пары (X, Y) в пару (X', Y') (то есть $f(Y) \subset Y'$). Постройте гомоморфизмы модулей $f_{\#,n} : C_n(X, Y) \to C_n(X', Y')$ и докажите, что они образуют морфизм комплексов (т.е. коммутируют с дифференциалами). б) Определите гомоморфизмы $f_{*,n} : H_n(X, Y) \to H_n(X', Y')$ и докажите, что $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. в) Пусть $f_t : X \to X'$, $0 \le t \le 1$ — гомотопия пар $(X, Y) \to (X', Y')$ (т.е. $f_t(Y) \subset Y'$). Докажите, что отображение K_n, определенное в лекции 3, может быть рассмотрено как цепная гомотопия комплексов $C(X, Y) \to C(X', Y')$, удовлетворяющая равенству $K_{n-1}(\partial_n^{X,Y} f) + \partial_{n+1}^{X',Y'} K_n(f) = (f_1)_\# - (f_0)_\#$. г) Выведите отсюда, что $(f_0)_* = (f_1)_*$ на гомологиях $H(X, Y)$ (тем самым теорема доказана) и что относительные гомологии гомотопически эквивалентных пар одинаковы (это уже следствие).

Пусть теперь $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты, и пусть $A' = A \cap Y$, $B' = B \cap Y$. (Тем самым A' и B' открыты в топологии $Y \subset X$, но не обязательно — в топологии X.) Тогда определен комплекс $C^{A,B}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C^{A,B}(X)/C^{A',B'}(Y)$ и морфизм комплексов (вложение) $\iota : C^{A,B}(X, Y) \to C(X, Y)$.

Теорема 6. *Морфизм ι порождает изоморфизм в гомологиях.*

Упражнение 7. Докажите теорему 6 по аналогии с лекцией 5.

Так же, как и для абсолютных гомологий, определена точная последовательность комплексов $0 \to C(A \cap B, A' \cap B') \xrightarrow{\lambda} C(A, A') \oplus C(B, B') \xrightarrow{\mu} C^{A,B}(X, Y) \to 0$. Здесь λ индуцирован тавтологическими вложениями пар: $\lambda(x) = (y, z)$, где $y \in C(A, A')$ и $z \in C(B, B')$ — та же самая сумма сингулярных симплексов, что и $x \in C(A \cap B, A' \cap B')$ (задана с точностью до прибавления цепи, лежашей в $A' \cap B' \subset A', B'$). Гомоморфизм μ сопоставляет паре относительных цепей (y, z) цепь $y - z \in C(X, Y)$; при этом y и z заданы с точностью до прибавления цепей из $A \subset Y$ и $B \subset Y$ соответственно, так что результат определен корректно. Из теоремы Бокштейна получается точная последовательность Майера–Виеториса относительных гомологий: $\dots H_n(A \cap B, A' \cap B') \xrightarrow{\lambda_{n,*}} H_n(A, A') \oplus H_n(B, B') \xrightarrow{\mu_{n,*}} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A \cap B, A' \cap B') \to \dots$.

Геометрический смысл относительных гомологий особенно прозрачен в случае, когда X — клеточное пространство, а $Y \subset X$ — клеточное подпространство. Для доказательства нужно техническое утверждение, которое упоминалось, но не доказывалось в предыдущем семестре:

Лемма 8 (лемма Борсука). *Пусть X — клеточное пространство, $Y \subset X$ — клеточное подпространство, Z — произвольное топологическое пространство. Пусть задана гомотопия $\Phi : Y \times [0, 1] \to Z$ и отображение $\Psi_0 : X \to Z$ такое, что $\Psi_0(y) = \Phi(y, 0)$ для любого $y \in Y$. Тогда существует гомотопия $\Psi : X \times [0, 1] \to Z$ такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ при всех $x \in X$ и $\Phi(y, t) = \Psi(y, t)$ для всех $y \in Y$, $t \in [0, 1]$.*

Доказательство. Зафиксируем клетку $e_\alpha^{(k)}$ пространства X и предположим, что гомотопия Ψ уже задана на всех клетках подпространства Y и на всех клетках $e_\beta^{(m)}$ пространства X размерности $m < k$. Тем самым $\Psi(x, t)$ определена при $x \in \partial e_\alpha^{(k)}$ и произвльном t, а также при всех $x \in X$ и $t = 0$. Отождествляя $e_\alpha^{(k)}$ с $\operatorname{int} B_k$ (с помощью характеристического отображения $\chi_\alpha^{(k)}$), получим задачу продолжения отображения Ψ на $B_k \times [0, 1]$ при условии, что оно задано на $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_k \times [0, 1] \cup B_k \times \{0\}$.

Существует непрерывное отображение (ретракция) $f : B_k \times [0, 1] \to C_k$ такое, что $f(s) = s$ при всех $s \in C_k \subset B_k$ (например, можно вложить $B_k \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{k+1}$ и взять в качестве f проекцию из точки $(a, 1 + \varepsilon)$, где a — центр шара B_k, а $\varepsilon > 0$ произвольно. Теперь для произвольной точки $b \in B_k$ и произвольного $t \in [0, 1]$ положим по определению $\Psi(b, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(f(b, t))$ $(f(b, t) \in C_k$, поэтому правая часть уже определена).

Тем самым существует продолжение гомотопии Ψ в произвольную клетку, если во все клетки меньшей размерности гомотопия уже продолжена. При этом продолжение можно делать одновременно для всех клеток данной размерности. Таким образом получим для каждого n непрерывное отображение $\Psi_n : \mathrm{sk}_n(X) \times [0,1] \to Y$, продолжающее гомотопию Φ и отображение Ψ_0, причем эти продолжения согласованы: $\Psi_n|_{\mathrm{sk}_{n-1}(X)\times[0,1]} = \Psi_{n-1}$. Это дает отображение $\Psi : X \times [0,1] \to Y$, непрерывность которого вытекает из определения клеточной топологии: непрерывность на каждом остове влечет непрерывность на всем пространстве. $\square$

Напомним, что если $a \in X$, то согласно примеру 2, *приведенные гомологии* $\tilde{H}_n(X,R) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(X,a,R)$ изоморфны $H_n(X,R)$ при $n > 0$ и отличаются от них прямым слагаемым R при $n = 0$.

Теорема 9. *Пусть X — клеточное пространство, Y — его клеточное подпространство, X/Y — фактор-пространство X, в котором Y стянуто в точку a. Тогда отображение проекции $p : (X,Y) \to (X/Y,a)$ порождает изоморфизм гомологий $p_* : H_*(X,Y) \to \tilde{H}_*(X/Y)$.*

Доказательство. Обозначим CY — конус над пространством Y, то есть факторпространство произведения $Y \times [0,1]$ по склейке $(y_1,1) \sim (y_2,1)$ при всех $y_1, y_2 \in Y$. Поскольку Y — клеточное пространство, конус CY также будет клеточным (уточните его клеточную структуру!). Приклеим CY к X, отождествляя каждую точку $(y,0)$ основания конуса с точкой $y \in Y \subset X$; полученное пространство обозначим Z. Пространство Z тоже клеточное, а конус $CY \subset Z$ — его клеточное подпространство. CY стягивается в точку v (вершину конуса); отсюда, по лемме 8, существует гомотопия $F_t : Z \to Z$ такая, что $F_t(CY) \subset CY$, $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_1(CY) = \{v\}$. Последнее условие означает, что F_1 можно рассматривать как отображение пары $(Z/CY, \{v\})$, гомеоморфной паре $(X/Y,a)$, в пару (Z,CY). Наличие гомотопии F_t означает (убедитесь!), что пара (F_1,G), где $G : (Z,CY) \to (Z/CY,\{v\})$ — проекция на фактор, — гомотопическая эквивалентность пар (Z,CY) и паре $(X/Y,a)$. Отсюда $H(Z,CY) = \tilde{H}(X/Y)$, и нам нужно теперь доказать, что $H(Z,CY)$ изоморфна $H(X,Y)$.

Положим $A = Z \setminus X$ и $B = Z \setminus \{v\}$. Очевидно, $C_n^{A,B}(Z,CY) = C_n(B, CY \setminus \{v\})$; теперь из теоремы 6 вытекает, что $H(Z,CY) = H(B, CY \setminus \{v\})$. Пара $(B, CY \setminus \{v\})$ гомотопически эквивалентна паре (X,Y) (цилиндр без вершины $CY \setminus \{v\}$ деформацмонно ретрагируется на свое верхнее основание), откуда $H(X,Y) = H(B, CY \setminus \{v\}) = H(Z,CY) = \tilde{H}(X/Y)$. $\square$