ЛЕКЦИЯ 8

Аннотация. Клеточные гомологии.

Пусть $Z \subset Y \subset X$ — топологические пространства, и ι_Z^Y, ι_Y^X — тавтологические вложения. Тогда $p = (\iota_Y^X, \mathrm{id}_Z)$ можно рассматривать как отображение пар $(Y, Z) \to (X, Z)$, а $q = (\mathrm{id}_X, \iota_Z^Y)$ — как отображение пар $q : (X, Z) \to (X, Y)$. Тем самым возникает последовательность комплексов $0 \to C(Y, Z) \xrightarrow{p_*} C(X, Z) \xrightarrow{q_*} C(X, Y) \to 0$. Как легко проверить, эта последовательность — точная; по теореме Бокштейна ей соответствует точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y, Z) \to H_n(X, Z) \to H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y, Z) \to \dots$, называемая точной последовательностью тройки. Точная последовательность пары — частный случай точной последовательности тройки: $Z = \varnothing$.

Пусть X — клеточное пространство, а $W_n(X, R)$ — свободный R-модуль, порожденный множеством n-мерных клеток. Пусть σ — n-мерная клетка, $\chi_\sigma : B_n \to \overline{\sigma} \subset X$ — ее характеристическое отображение, и $\tau \subset \partial\sigma$ — $(n-1)$-мерная клетка (символом ∂ здесь обозначена граница в геометрическом смысле: $\partial\sigma = \overline{\sigma} \setminus \sigma$). Обозначим $A_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sk}_{n-1}(X) \setminus \tau$ (т.е. объединение всех клеток λ размерности, меньшей или равной $n-1$, кроме τ). Коэффициентом инцидентности $[\sigma : \tau]$ называется степень отображения $S^{n-1} = \partial B_n \xrightarrow{\chi_\sigma} \partial\sigma \xrightarrow{p_\tau} \overline{\tau}/A_\tau \xrightarrow{\chi_\tau^{-1}} S^{n-1}$, где p_τ — проекция $\partial\sigma \to \partial\sigma/A_\tau$. Как нетрудно убедиться (проверьте!), если $\tau \not\subset \overline{\sigma}$, то $[\sigma : \tau] = 0$. Определим теперь гомоморфизм модулей $\partial_n : W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ условием $\partial_n(\sigma) = \sum_\tau [\sigma : \tau]\tau$ — согласно замечанию выше, сумма берется только по клеткам $\tau \subset \overline{\sigma}$, и теи саиыи конечна.

Теорема 1. *Модули $W_n(X)$ и гомоморфизмы ∂_n образуют комплекс, гомологии которого равны $H(X, R)$.*

Прежде чем доказывать теорему, выясним гомологический смысл модулей $W_n(X)$. Для краткости будем остовы пространства x обозначать просто sk_k, $k = 0, 1, \dots$. Согласно определению клеточного пространства, фактор $\mathrm{sk}_n / \mathrm{sk}_{n-1}$ — букет n-мерных сфер, взаимно однозначно соответствующих n-мерным клеткам в X.

Упражнение 2. а) Пусть A_I — букет n-мерных сфер S_i^n, $i \in I$. Докажите, что $H_n(A_I)$ — свободный модуль, порожденный сферами букета, $H_0(A_I) = R$, а остальные гомологии A нулевые. б) Пусть $u_i : S^n \to A_I$ — вложение, гомеоморфно переводящее S^n в i-ю сферу букета, а $p_j : A_I \to S^n$ — проекция, гомеоморфная на j-й сфере, а остальные сферы отображающая в точку (ту же, в которую переходит вершина букета). Тогда для любого отображения $f : A_I \to A_J$ гомоморфизм $f_{*,n} : H_n(A_I) \to H_n(A_J)$ задается матрицей, (i, j)-й элемент которой равен $\deg(p_j \circ f \circ u_i)$.

Тем самым $W_n(X)$ изоморфен $H_n(\mathrm{sk}_n / \mathrm{sk}_{n-1}) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$ (последнее равенство — из теоремы Борсука).

Гомологический смысл дифференциала ∂_n:

Лемма 3. *Гомоморфизм $\partial_n : W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = W_{n-1}(X)$ совпадает с гомоморфизмом из точной последовательности тройки* $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$.

Доказательство. Пусть, как обычно, B_n — n-мерный шар, $S^{n-1} = \partial B_n$ — его граница. Тогда характеристическое отображение χ_σ клетки σ можно рассматривать как отображение троек $(B_n, S^{n-1}, \varnothing) \to (\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$. Тогда возникает морфизм точных последовательностей троек — коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & R & & R & & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
H_n(B_n) & \to & H_n(B_n, S^{n-1}) & \xrightarrow{p} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(B_n) \\
& & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \downarrow (\chi_\sigma|_{\mathrm{sk}_{n-1}})_* & & \\
& & H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) & & \\
& & \| & & \| & & \\
& & W_n(X) & & W_{n-1}(X) & &
\end{array}.$$

Как известно $H_n(D_n) = H_{n-1}(D_n) = 0$ (мы предполагаем $n \geq 2$; случай $n = 1$ — упражнение, ответ там такой же),$H_{n-1}(S^{n-1}) = R$, откуда в силу точности последовательности (или по теореме Борсука) $H_n(D_n, S^{n-1}) = R$, и p — изоморфизм.

В левой колонке диаграммы по определению характеристического отображения $\chi_\sigma : B_n/S^{n-1} \to \mathrm{sk}_n / \mathrm{sk}_{n-1}$ — гомеоморфизм. По теореме Борсука относительные гомологии в левой колонке диаграммы совпадают с соответствующими гомологиями факторпространств; следовательно, $(\chi_\sigma)_*$ в левой колонке — изоморфизм, и $(\chi_\sigma)_*(1)$ — образующая $a_\sigma \in W_n(X)$, соответствующая клетке σ.

В правой колонке диаграммы из упражнения 2б следует, что $(\chi_\sigma|_{S^{n-1}})_*(1) = \sum_\tau [\sigma : \tau] a_\tau = \partial^W a_\sigma$. Диаграмма коммутативна, так что $\delta(a_\sigma) = (\chi_\sigma)_*(p(1)) = (\chi_\sigma|_{S^{n-1}})_*(1)$, откуда и вытекает утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \in W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$. Представитель класса гомологий x — сумма относительных циклов, т.е. сингулярных цепей в sk_n, границы которых лежат в sk_{n-1}. Связывающий гомоморфизм в точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$ сопоставляет x его границу, рассматриваемую как относительный цикл в $H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$. Согласно лемме 3, $\partial_n^W x \in W_{n-1}(X)$ — эта граница. Теперь $\partial_{n-1}^W(\partial_n^W(x)) = 0$, потому что граница границы равна нулю ($\partial^2 = 0$ в сингулярном комплексе). Тем самым модули $W_n(X)$ и гомоморфизмы ∂_n^W образуют комплекс.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2})$ содержит фрагмент $W_{n+1}(X) = H_{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n) \xrightarrow{\delta} H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1} / \mathrm{sk}_n)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n+1} / \mathrm{sk}_n$ — букет $(n+1)$-мерных сфер, последний член равен нулю согласно упражнению 2а, и α — эпиморфизм, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Im}\delta$.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_{n-1} / \mathrm{sk}_{n-2}) = H_n(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) \to H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) \xrightarrow{\beta} H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) = W_n(X) \xrightarrow{\partial_n^W} H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = W_{n-1}(X)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n-1} / \mathrm{sk}_{n-2}$ — букет $(n-1)$-мерных сфер, первый член равен нулю согласно упражнению 2а, и β — мономорфизм. Тем самым $H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) = \operatorname{Im}\beta = \operatorname{Ker}\partial_n^W = \mathcal{Z}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{W}}$ — модуль n-мерных клеточных циклов.

Из определения гомоморфизмов в точной последовательности тройки нетрудно заметить, что $\beta \circ \delta : W_{n+1}(X) \to W_n(X)$ совпадает с ∂_{n+1}^W (т.е., согласно лемме 3, с гомоморфизмом в точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$). Тем самым имеется следующая коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{cccccc} W_{n+1}(X) & \xrightarrow{\delta} & H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{Z}_n^W & \to 0 \\ & \searrow & \xrightarrow{\partial_{n+1}^W} & \nearrow & \bigcap & \\ & & & & W_n(X) & \end{array}$$

Отсюда получается, что $H_n^W(X) = \mathcal{Z}_n^W / \operatorname{Im}\partial_{n+1}^W = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Im}\delta = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Ker}\alpha$ (поскольку α — эпиморфизм, см. выше) $= H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2})$.

Для всякого $m \le n-2$ точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1})$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_m / \mathrm{sk}_{m-1}) = H_n(\mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{m-1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1}) = H_{n-1}(\mathrm{sk}_m / \mathrm{sk}_{m-1})$. Поскольку $\mathrm{sk}_m / \mathrm{sk}_{m-1}$ представляет собой букет m-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{m-1})$ — следовательно, $H_n^W(X) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-3}) = \dots = H_n(\mathrm{sk}_{n+1})$ (поскольку $\mathrm{sk}_{-1}(X) = \varnothing$).

Для всякого $m \ge n+1$ точная последовательность пары $(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m)$ содержит фрагмент $H_{n+1}(\mathrm{sk}_{m+1} / \mathrm{sk}_m) = H_{n+1}(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m) \to H_n(\mathrm{sk}_m) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m) = H_n(\mathrm{sk}_{m+1} / \mathrm{sk}_m)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{m+1} / \mathrm{sk}_m$ — букет $(m+1)$-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_m) = H_n(\mathrm{sk}_{m+1})$, и $H_n^W = H_n(\mathrm{sk}_m)$ для всякого $m \ge n+1$.

Если клеточное пространство X конечномерное — то есть размерности клеток не превосходят некоторого числа N — то $\mathrm{sk}_N = X$, причем без ограничения общности $N \ge n+1$, откуда $H_n^W = H_n(\mathrm{sk}_N) = H_n(X)$. Если X бесконечномерное — то есть имеются клетки сколь угодно больших размерностей — то обозначим $\iota_{km} : \mathrm{sk}_k \to \mathrm{sk}_m$ и $\iota_k : \mathrm{sk}_k \to X$ тавтологические вложения. Из написанного выше следует, что при $m \ge k \ge n+1$ гомоморфизм $(\iota_{km})_{*,n}$ является изоморфизмом; докажем, что $(\iota_k)_{*,n}$ тоже изоморфизм.

Пусть $x \in C_n(\mathrm{sk}_k)$ — сингулярный цикл, класс гомологий которого $[x]$ принадлежит ядру $(\iota_k)_{*,n}$. Это означает, что $x = \partial y$ для некоторого $y \in C_{n+1}(X)$. В силу компактности симплекса любой сингулярный симплекс в клеточном пространстве целиком лежит в каком-нибудь остове; сингулярная цепь y — сумма конечного числа таких симплексов, так что $y \in C_{n+1}(\mathrm{sk}_m)$ для некоторого $m \ge k$. Но тогда $[x] \in \operatorname{Ker}((\iota_{km})_{*,n})$, то есть $[x] = 0$ в $H_n(\mathrm{sk}_k)$, так что $(\iota_k)_{*,n}$ — мономорфизм. С другой стороны, пусть $z \in C_n(X)$ — представитель произвольного класса гомологий $[z] \in H_n(X)$. Как и выше, z лежит в каком-нибудь остове: $z \in C_n(\mathrm{sk}_k)$ и является там циклом (почему?), представляя класс $[z]_m \in H_n(\mathrm{sk}_k)$. Но тогда $[z] = (\iota_k)_{*,n}([z]_m)$, так что $(\iota_k)_{*,n}$ — эпиморфизм. Таким образом, $(\iota_k)_{*,n}$ — изоморфизм, и равенство $H_n^W = H_n(X)$ верно для всех клеточных пространств. $\square$

Пример 4. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$. Обозначим $e^{(2k)} = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0, z_k \ne 0\}$; здесь $0 \le k \le n$. Подножества $e^{(2k)} \subset \mathbb{C}P^n$ образуют клеточное разбиение: характеристическое отображение $\chi^{(2k)} : B_{2k} = \{(w_0, \dots, w_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid |w_0|^2 + \dots + |w_k|^2 \le 1\} \to \mathbb{C}P^n$ задано формулой $\chi^{(2k)}(w_0, \dots, w_{k-1}) = [w_0 : \dots : w_{k-1} : \sqrt{1 - (|w_0|^2 + \dots + |w_k|^2)} : 0 : \dots : 0]$ (докажите, что это действительно характеристическое отображение!). Построенное клеточное разбиение содержит одну клетку каждой четной размерности $0, 2, \dots, 2n$. Тем самым клеточный комплекс выглядит как $0 \to R \to 0 \to R \to \dots \to 0 \to R \to 0$; очевидно, все стрелки нулевые, откуда $H_{2s}(X, R) = R$ при $0 \le s \le n$, а остальные гомологии равны нулю. В частности, отсюда вытекает, что комплексные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.