ЛЕКЦИЯ 9–10

Аннотация. Старшие гомологии многообразия.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Тогда отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$ называется гладким, если для любой точки $a \in V$ всякая функция $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ имеет в этой точке непрерывные частные производные всех порядков. Матрицу $m \times n$ с матричными элементами $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, будем обозначать $\varphi'(a)$ и называть производной отображения φ в точке a. Очевидно, что композиция гладких отображений, если она определена, — гладкое отображение; производная композиции равна произведению производных (уточните!).

Атласом размерности n на множестве M называется набор (конечный или бесконечный любой мощности) троек $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$, где $U_\alpha \subset M$, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ — взаимно однозначное отображение, если выполнены следующие условия:

1. Существует не более чем счетное множество карт $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots$, объединение которых — все множество M (как следствие, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$).
2. Для любых α, β образ $V_{\alpha\beta} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ открыт, а отображение $\varphi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ гладкое.
3. Если $a, b \in M$ и $a \neq b$, то существуют α, β (могут быть и одинаковыми) и открытые множества $W_\alpha \subset V_\alpha$ и $W_\beta \subset V_\beta$ такие, что $a \in U_\alpha$, $x_\alpha(a) \in W_\alpha$, $b \in U_\beta$, $x_\beta(b) \in W_\beta$, и $x_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap x_\beta^{-1}(W_\beta) = \varnothing$.

Множества U_α называются картами, отображения x_α — координатами, тройки $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ — системами координат, $\varphi_{\alpha\beta}$ — отображениями замены координат.

Очевидно, отображения звмены координат удовлетворяют равенствам $\varphi_{\gamma\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\gamma\beta}$ в тех точках, где композиция определена. Поскольку $\varphi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{V_\alpha}$, отображения замены координат обратимы: $\varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \mathrm{id}_{V_{\alpha\beta}}$. Отсюда вытекает, что $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a))\varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta(a)) = \mathrm{Id}$ для произвольного $a \in U_\alpha \cap U_\beta$ и, следовательно, $\det \varphi'_{\alpha\beta}(u) \neq 0$ для всех $u \in V_{\alpha\beta}$. Если $\det \varphi'_{\alpha\beta}(u) > 0$ в любой точке u и для всех α, β, то атлас называется ориентированным.

Два атласа на одном и том же множестве M называются эквивалентными, если их объединение — тоже атлас (иными словами, если отображения замены координат между координатами первого и второго атласа гладкие — остальные требования к атласу будут для объединения выполнены автоматически). Ясно, что это на самом деле отношение эквивалентности.

Гладким многообразием размерности n называется множество M, на котором фиксирован класс эквивалентных n-мерных атласов.

Пример 1. Структура гладкого n-мерного многообразия на сфере $S^n = \{y = (y_0, \dots, y_n) \mid y_0^2 + \dots + y_n^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — атлас из двух карт: $U_1 = \{y \in S^n \mid y_0 \neq 1\}$, $U_2 = \{y \in S^n \mid y_0 \neq -1\}$. Положим $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$, а координатами служат стереографические проекции: $x_1(y) = \frac{1}{1-y_0}(y_1, \dots, y_n)$, $x_2(y) = \frac{1}{1+y_0}(y_1, \dots, y_n)$. Отображение $x_1 : U_1 \to V_1$ взаимно однозначное: если $z = (z_1, \dots, z_n) = x_1(y)$, то $y_0 = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$ (где $|z|^2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1^2 + \dots + z_k^2$) и $y_k = z_k(1 - y_0)$ для всех $k = 1, \dots, n$ (проверьте!).

Отображение замены координат $\varphi_{12}(z) = \frac{z}{|z|^2}$ (где $z = (z_1, \dots, z_n)$) определено на множестве $V_{12} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и принимает значение в множестве $V_{21} = V_{12}$; обратное отображение φ_{21} задается той же формулой.

Пример 2. Ту же S^n можно покрыть $2n$ картами $U_k^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{y = (y_0, \dots, y_n) \in S^n \mid y_k > 0\}$, $U_k^- \stackrel{\text{def}}{=} \{y = (y_0, \dots, y_n) \in S^n \mid y_k < 0\}$; координаты $x_k^+(y) = (y_0, \dots, \widehat{y_k}, \dots, y_n)$, отображение перехода между U_k^+ и U_l^+ при $k < l$ это $\varphi_{kl}^{++}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, \widehat{z_k}, \dots, z_{l-1}, \sqrt{1 - (z_1^2 + \dots + z_n^2)}, z_l, \dots, z_n)$ отображает $V_{kl}^{++} \to V_{lk}^{++}$, где все $V_{kl}^{++} \subset \mathbb{R}^n$ — шары единичного радиуса с центром в начале координат; для других сочетаний индексов и знаков аналогично. Непосредственная проверка показывает (проделайте!), что отображения замены координат между данным атласом и атласом примера 1 гладкие, так что эти атласы эквивалентны (принадлежат одной и той же гладкой структуре на S^n).

На гладком многообразии определена топология: подмножество $U \subset M$ считается открытым, если $x_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ открыто для всех α. Нетрудно убедиться (проверьте!), что это на самом деле топология, относительно которой все карты U_α открыты, а координатные отображения $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, и что это самая грубая (с наименьшим запасом открытых множеств) топология, обладающая этими свойствами. Свойство 3 в определении делает топологию многообразия хаусдорфовой, свойство 1 обеспечивает существование счетной базы. Гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, откуда вытекает, что эквивалентные атласы дают одну и ту же топологию на множестве M — тем самым, структура топологического пространства на многообразии определяется гладкой структурой (а не конкретным атласом).

Гладкие многообразия являются объектами категории, морфизмы которой — гладкие отображения. Отображение $f : M_1 \to M_2$ одного многообразия в другое (не обязательно той же размерности) называется *гладким*, если для любой точки $a \in M_1$ найдутся системы координат (U_1, V_1, x) на M_1 и (U_2, V_2, y) на M_2 такие, что $a \in U_1$, $f(a) \in U_2$, $f(U_1) \subset U_2$ и отображение $f_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} y \circ f \circ x^{-1} : V_1 \to V_2$ — гладкое. Отображение f_{xy} называется записью отображения f в координатах x, y. Если выбрать на M_1 и M_2 другие системы координат (U_1', V_1', x') и (U_2', V_2', y'), карты которых содержат точки a и $f(a)$ соответственно, то, очевидно, .

$$f_{x'y'} = \varphi_{y'y} \circ f_{xy} \circ \varphi_{xx'}. \tag{1}$$

(“формула замены координат”). Поскольку отображения замены координат гладкие, гладкость отображения f не зависит от выбора систем координат в окрестности точек a и $f(a)$.

Теорема 3 (лемма о вырезании)**.** *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ открыто, а $B \subset A$ замкнуто. Пусть $\iota \stackrel{def}{=} \iota_{X\setminus B}^X : X\setminus B \to X$ — тавтологическое вложение. Тогда $\iota_* : H_n(X\setminus B, A\setminus B) \to H_n(X, A)$ — изоморфизм при всех n.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие X двумя открытыми множествами A и $X\setminus B$, и рассмотрим комплекс $C^{A,X\setminus B}(X)$; очевидно, $C(A) \subset C^{A,X\setminus B}(X) \subset C(X)$. Гомологии фактор-комплекса $C^{A,X\setminus B}(X)/C(A)$ изоморфны гомологиям комплекса $C(X)/C(A)$ — это доказывается так же, как соответствующий результат для абсолютных гомологий в лекциях 4–5. С другой стороны, комплекс $C^{A,X\setminus B}(X)/C(A)$ изоморфен $C(X \setminus B)/C(A \setminus B)$ — оба порождены сингулярными симплексами, образ которых лежит в $X \setminus B$, но не лежит в A. □

Следствие 4. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $a \in M$. Тогда $H_n(M, M \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Поскольку M — n-мерное многообразие, существует открытое подмножество $U \subset M$, $a \in U$, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. По теореме о вырезании, в которой $A = M \setminus \{a\}$, $B = M \setminus U$, получим $H_n(M, M \setminus \{a\}) = H_n(U, U \setminus \{a\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. □

Группа $H_n(M, M \setminus \{a\})$ имеет, тем самым, две образующих (отличающихся знаком); выбор одной из них называется локальной ориентацией многообразия M в точке a. Обозначим

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, \mu) \mid a \in M, \mu — \text{локальная ориентация } M \text{ в точке } a\}.$$

Для произвольного $A \subset M$, $a \in A$, тавтологическое вложение $\iota_{a,A} : M \setminus A \to M \setminus \{a\}$ порождает гомоморфизм гомологий $(\iota_{a,A})_* : H_n(M, M \setminus A) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$.

Пусть теперь $U \subset M$ открыто и гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, и $a \in M$. Тогда вложение $\iota_{a,U}$ — гомотопическая эквивалентность, откуда $(\iota_{a,U})_*$ — изоморфизм. Пусть $\nu \in H_n(M, M\setminus U) = \mathbb{Z}$ — образующая, тогда $(\iota_{a,U})_*(\nu) \in H_n(M, M \setminus \{a\})$ — тоже образующая (одна из двух). Обозначим $R_{U,\nu} = \{(a, (\iota_{a,U})_*(\nu)) \mid a \in U\} \subset \widetilde{M}$.

Теорема 5. *Множества $R_{U,\nu}$ образуют базу топологии в $\widetilde{M}$. В этой топологии отображение $\Phi : \widetilde{M} \to M$, действующее по формуле $\Phi(a, \nu) = a$, является двулистным накрытием. Если U — карта на M и $x_U : U \to \mathbb{R}^n$ — координаты, то $y_U \stackrel{def}{=} x_U \circ \Phi$ — координаты в $R_{U,\nu}$; тогда $\{(R_{U,\nu}, y_U)\}$ — атлас на $\widetilde{M}$.*

Доказательство. Очевидно, $\bigcup_{U,\nu} R_{U,\nu} = \widetilde{M}$, где U пробегает все карты на M, гомеоморфные $\mathbb{R}^n$, а ν для каждой U принимает оба возможных значения. Пусть $U_1, U_2 \subset M$ открыты и гомеоморфны $\mathbb{R}^n$, и $(a, \mu) \in R_{U_1,\nu_1} \cap R_{U_2,\nu_2}$. Тогда существует $U \subset U_1 \cap U_2$, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$, для которого $a \in U$. Пусть $\nu_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{a,U_1})_*^{-1}(\mu)$, $\nu_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{a,U_2})_*^{-1}(\mu)$. Поскольку $\iota_{a,U}\iota_{U,U_1} = \iota_{a,U_1}$, получим $\mu = (\iota_{a,U})_*(\iota_{U,U_1})_*\nu_1$ и, аналогично, $\mu = (\iota_{a,U})_*(\iota_{U,U_2})_*\nu_2$. Поскольку $(\nu_{a,U})_*$ — изоморфизм, получим $(\iota_{U,U_1})_*\nu_1 = (\iota_{U,U_2})_*\nu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu$. Таким образом, $(a, \mu) \in R_{U,\nu}$, что и означает (почему?), что множества $R_{U,\nu}$ при всевозможных U и ν образуют базу топологии на $\widetilde{M}$.

Для доказательства того, что Φ — накрытие, заметим, что множества $R_{U,\nu}$ с одним и тем же U, но различными ν (их два) не пересекаются. Отображение $\Phi : R_{U,\nu} \to U$ — гомеоморфизм: если $a \in V \subset U$, где V открыто, то $(a, (\iota_{a,U})_*\nu) \in R_{V,(\iota_{VU})_*\nu} \subset R_{U,\nu}$; множество $R_{V,(\iota_{VU})_*\nu}$ открыто, что и означает непрерывность. Следовательно, Φ — накрытие.

Доказательство последнего утверждения — (легкое) упражнение. □

Теорема 6. *Накрытие $\widetilde{M} \to M$ тривиально тогда и только тогда, когда на M существует ориентированный атлас.*

Доказательство. Пусть на M существует ориентированный атлас. Без ограничения общности можно считать (почему?), что все его системы координат (U, V, x) таковы, что $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар радиуса 1 с центром в нуле. Выберем образующую $\varrho_0 \in H_n(V, V \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Для произвольной точки $p \in V$ пусть $\Phi_p : V \to V$ — гомеоморфизм, гомотопный тождественному и такой, что $\Phi_p(0) = p$ (мы доказывали существование такого в лекции 6); тогда положим $\varrho_p \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi_p)_* \varrho_0 \in H_n(V, V \setminus \{p\})$.

Пусть теперь $a \in U$ и $\mu_{U,a} = x_*^{-1} \varrho_{x(a)} \in H_n(U, U \setminus \{a\}) = H_n(M, M \setminus \{a\})$. От выбора системы координат (U, V, x) класс гомологий $\mu_{U,a}$ не зависит: если (W, V, y) — другая система координат с картой $W \ni a$, то $\mu_{W,a} = y_*^{-1} \varrho_{x(a)} = x_*^{-1} (\psi_{yx})_* \varrho_{y(a)}$, где ψ_{yx} — отображение замены координат. Поскольку $\det \psi'_{yx} > 0$ во всех точках, $(\psi_{xy})_* \varrho_{y(a)} = \varrho_{x(a)}$. Тем самым мы можем обозначить $\mu_a \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{U,a}$ для произвольного U. Поскольку все классы ϱ_p являются образами одного и того же класса ψ, точка $(a, \mu_a) \in \widetilde{M}$ непрерывно зависит от a — это сразу следует из определения топологии в $\widetilde{M}$. Тем самым построено сечение $a \mapsto (a, \mu_a)$ накрытия $\Phi : \widetilde{M} \to M$; но двулистное накрытие, имеющее сечение, тривиально.

Обратно, пусть $\Phi : \widetilde{M} \to M$ тривиально и, следовательно, имеет сечение: для каждой точки $a \in M$ можно выбрать образующую $\xi_a \in H_n(M, M \setminus \{a\})$ так, что для каждой точки a в некоторой карте $U \ni a$ существует класс $\nu \in H_n(M, M \setminus U)$ такой, что $\xi_b = (\iota_{b,U})_* \nu$ для всех $b \in U$. Если при этом $\xi_a = \mu_{U,a}$, где $\mu_{U,a}$ определено как выше, то оставим систему координат x в карте U неизменной, а если $\xi_a = -\mu_{U,a}$ (больше возможностей нет), то заменим x на $\tilde{x} = r_1 \circ x_U$, где r_1 — линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, меняющее знак первой координаты (в принципе, можно заменить r_1 любым другим линейным отображением с отрицательным определителем). При такой замене координат $\mu_{U,a}$ меняет знак, так что после всех замен мы получаем $\xi_a = \mu_{U,a}$ при всех a и всех U. Отсюда вытекает (так же как в первой части доказательства), что $\psi_{xy} \varrho_{y(a)} = \varrho_{x(a)}$ для всех (U, V, x), (W, V, y) и $a \in U \cap W$. Следовательно, $\det \psi'_{xy} > 0$ во всех точках, то есть атлас после замен стал ориентированным. □

Основным результатом этих лекций будет

Теорема 7. *Пусть M — многообразие, $A \subset M$ компактно,*

1. $H_k(M, M \setminus A) = 0$ *для всех* $k > n$.
2. *Для всякого сечения $\mu : A \to \widetilde{M}$ ориентирующего накрытия, определенного на A, существует и единствен элемент $\Psi(\mu) \in H_n(M, M \setminus A)$ такой, что $\mu(a) = (\iota_{a,A})_* \Psi(\mu)$ для всякого $a \in A$.*

Следствие 8. *Если M — связное компактное ориентируемое n-мерное многообразие, то $H_n(M) = \mathbb{Z}$ и $H_k(M) = 0$ при $k > n$.*

Доказательство следствия 8. Положим $A = M$; поскольку M ориентируемо, из теоремы 6 вытекает, что ориентирующее накрытие тривиально и, следовательно, имеет на всем M сечение. тогда из утверждания 2 теоремы вытекает, что гомоморфизм $H_n(M, \varnothing) = H_n(M) \to H_n(M, M \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$ из точной последовательности пары $(M, M \setminus \{a\})$ является изоморфизмом. □

Доказательство теоремы 7 опирается на следующую лемму:

Лемма 9. *Если теорема 7 верна для подмножеств $P, Q \subset M$ и их пересечения $P \cap Q$, то она верна и для объединения $P \cup Q$.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие $M \setminus (P \cap Q)$ двумя открытыми множествами $U = M \setminus P$ и $V = M \setminus Q$. Тогда возникает короткая точная последовательность комплексов

$$0 \to C(M)/C(M \setminus (P \cup Q)) \to C(M)/C(M \setminus P) \oplus C(M)/C(M \setminus Q) \to C(M)/C^{(M \setminus P, M \setminus Q)}(M \setminus (P \cap Q)) \to 0;$$

здесь, как обычно, $C^{(M \setminus P, M \setminus Q)}(M \setminus (P \cap Q))$ — свободный модуль, порожденный "мелкими" сингулярными симплексами, образы которых лежит либо в $M \setminus P$, либо в $M \setminus Q$. Как и при доказательстве теоремы Майера–Виеториса, доказывается, что гомологии последнего члена последовательности равны $H(M, M \setminus (P \cap Q))$. Теорема Бокштейна дает точную последовательность гомологий, которая для каждого k содержит такой фрагмент:

$$H_{k+1}(M, M \setminus (P \cap Q)) \to H_k(M, M \setminus (P \cup Q)) \to H_k(M, M \setminus P) \oplus H_k(M, M \setminus Q) \to H_k(M, M \setminus (P \cap Q)).$$

Если $k > n$, то по предположению, равны 0 все члены этого фрагмента, кроме $H_k(M, M \setminus (P \cup Q))$ — из точности вытекает, что он тоже равен 0.

Пусть $k = n$ и μ — сечение накрытия над $P \cup Q$. Ограничения сечения μ являются сечениями и над P, и над Q, и над $P \cap Q$. Тогда образ элемента $\Psi(\mu|_P)$ при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus P) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$ равен $\mu(a)$ для каждой точки $a \in P$ — в частности, для каждой точки $a \in P \cap Q$. Тем же свойством обладает класс $\Psi(\mu|_{P \cap Q})$. Поскольку по условию леммы такой класс в $H_n(M, M \setminus (P \cap Q))$ единственный, имеем $(\iota_{P \cap Q, P})_* \Psi(\mu|_P) = \Psi(\mu|_{P \cap Q})$; аналогично для $\Psi(\mu|_Q)$. Отсюда вытекает, что элемент $(\Psi(\mu|_P), \Psi(\mu|_Q))$ принадлежит ядру самой правой стрелки фрагмента и, следовательно, образу второй стрелки справа. Иными словами, существует класс $\nu \in H_n(M, M \setminus (P \cup Q))$ такой, что $(\iota_{P, P \cup Q})_* \nu = \Psi(\mu|_P)$ и аналогично для Q.

Поэтому для всякой точки $a \in P$ получим $(\iota_{a,P\cup Q})_*\nu = (\iota_{a,P})_*\Psi(\mu|_P) = \mu(a)$, и аналогично для $a \in Q$. Следовательно, класс ν можно принять за $\Psi(\mu)$ (на всем $P \cup Q$). Единственность такого класса вытекает из того, что по предположению левый член фрагмента все равно 0, так что нужный нам гомоморфизм — вложение. $\square$

Доказательство теоремы 7. В случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а $A \subset M$ — выпуклое подмножество, теорема верна, т.к. $\{a\}$ — деформационный ретракт A, откуда вытекает, что $(\iota_{a,A})_* : H_n(M, M \setminus A) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$ — изоморфизм. Если теперь $M = \mathbb{R}^n$, а $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — конечное объединение выпуклых компактов, то теорема получается индукцией по m с применением леммы 9.

Пусть теперь $M = \mathbb{R}^n$, а $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Он ограничен; пусть $B \supset A$ — шар. Поскольку ориентирующее накрытие над $\mathbb{R}^n$ тривиально (как и любое накрытие), сечение μ можно продолжить (однозначно) до сечения $\tilde{\mu}$ на B. Но класс $\Psi(\tilde{\mu})$ существует, поскольку B выпукло — следовательно, положим $\Psi(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{A,B})_*\Psi(\tilde{\mu})$, так что существование доказано.

Единственность: пусть $z_1, z_2 \in C_n(\mathbb{R}^n)$ — сингулярные цепи, представляющие классы $[z_1], [z_2] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$, для которых $(\iota_{a,A})_*[z_1] = (\iota_{a,A})_*[z_2] = \mu(a)$ при всех $a \in A$. В частности, z_1, z_2 — относительные циклы, т.е. цепи $\partial z_1, \partial z_2$ — суммы сингулярных симплексов, образы которых не пересекаются с A. Поскольку симплексов в ∂z_1, ∂z_2 конечное число, объединение их образов — компакт $L \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Компакт L замкнут, так что для произвольной точки $a \in A$ существует шар $B_\delta(a)$ с центром в a, не пересекающий L. В силу компактности A можно покрыть конечным объединением таких шаров; обозначим это объединение K. Теперь $A \subset K \subset \mathbb{R}^n \setminus L$, так что z_1, z_2 — относительные циклы в $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$; обозначим $[z_1]_K, [z_2]_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ представляемые ими классы гомологий. Поскольку ориентирующее (как и любое) накрытие $\mathbb{R}^n$ тривиально, произвольное сечение $\mu : A \to \widetilde{\mathbb{R}^n}$ можно однозначно продолжить до сечения μ_K на K, и тогда $(\iota_{a,K})_*[z_1]_K = (\iota_{a,K})_*[z_2]_K = \mu_K(a)$ для всех $a \in K$ (почему?). Но для K теорема уже доказана, поскольку это объединение конечного числа выпуклых множеств, то есть существует единственный класс $\Psi(\mu_K)$ с таким свойством. Значит, $[z_1]_K = \Psi(\mu_K) = [z_2]_K$. Отсюда $[z_1] = (\iota_{A,K})_*[z_1]_K = (\iota_{A,K})_*[z_2]_K = [z_2]$, и утверждение 2 теоремы доказано при $M = \mathbb{R}^n$ (и произвольном A).

Если $k > n$, то рассмотрим произвольный класс $[z] \in H_k(M, M \setminus A)$, представленный цепью $z \in C_n(M)$. Построим компакт K как в доказательстве пункта 2; тогда $[z]_K \in H_k(M, M \setminus K) = 0$, откуда $[z] = (\iota_{A,K})_*[z]_K = 0$. В силу произвольности z получаем $H_k(M, M \setminus A) = 0$, так что теорема доказана для $M = \mathbb{R}^n$ и произвольного компактного A.

Пусть теперь M — произвольное n-мерное многообразие. Компактное подмножество $A \subset M$ можно (докажите!) представить в виде конечного объединения $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$, где все A_i — компакты, и для каждого i существует карта $U_i \supset A_i$, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Если $m = 1$, то система координат x_{U_i} переносит теорему в $\mathbb{R}^n$, где она уже доказана. Если $m > 1$, то применим индукцию по m: пусть $P = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ и $Q = A_m$. По предположению индукции теорема верна для P, Q и $P \cap Q$; теперь из леммы 9 вытекает, что она верна и для $A = P \cup Q$. $\square$

Пусть M_1, M_2 — компактные связные ориентируемые многообразия одной и той же размерности n, а $f : M_1 \to M_2$ — непрерывное отображение. Тогда $f_{*,n} : H_n(M_1) \to H_n(M_2)$ — гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, то есть умножение на число d, называемое степенью отображения f: $d = \deg f$. (Отметим, что чтобы определить d, нужно зафиксировать изоморфизмы $H_n(M_1)$ и $H_n(M_2)$ с $\mathbb{Z}$, то есть выбрать ориентацию обоих многообразий.)

Пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, а $a \in M_1$ — его некритическая точка; $c \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$. Из теоремы об обратной функции вытекает, что существует окрестность $U \subset M_2$ точки c, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$ и такая, что отображение $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ является диффеоморфизмом. Без ограничения общности можно считать, что U и $f^{-1}(U)$ лежат в пределах одной карты на соответствующих многообразиях. Если x и y — координаты картах $f^{-1}(U)$ и U соответственно (из ориентированного атласа; ориентация на M_1 и M_2 считается выбранной), то $f_{xy} : y \circ f \circ x^{-1}$ — диффеоморфизм двух открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, так что знак $\operatorname{sgn} \det f'_{xy}(u)$ постоянен. Этот знак называется знаком некритической точки a и обозначается $\operatorname{sgn}(a)$.

Следующая теорема нам уже известна в случае, когда M_1 и M_2 — сферы:

Теорема 10. *Пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое многообразие, а $c \in M_2$ — некритическое значение. Тогда прообраз $f^{-1}(c) \stackrel{def}{=} \{a_1, \dots, a_N\} \subset M_1$ конечен, и $\deg f = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(a_i)$.*

Доказательство. Как выше, зафиксируем координатную окрестность U точки c такую, что прообраз $f^{-1}(U)$ — дизъюнктное объединение непересекающихся координатных окрестностей $U_1, \dots, U_N$ таких, что $a_i \in U_i$ и $f|_{U_i} : U_i \to U$ — диффеоморфизм. Рассмотрим покрытие M_2 открытыми множествами U и $V = M_2 \setminus \{c\}$ и покрытие M_1 открытыми множествами $f^{-1}(U) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_N$ и $W = M_1 \setminus f^{-1}(c) = M_1 \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$.

Отображение f переводит одно покрытие в другое, так что f_* — морфизм последовательностей Майера–Виеториса этих покрытий. Он содержит следующий фрагмент:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}^N \\ \| & & \| \\ H_n(M_1) & \to & H_{n-1}((U_1 \setminus \{a_1\}) \sqcup \dots \sqcup (U_N \setminus \{a_N\}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(M_2) & \to & H_{n-1}(U \setminus \{c\}) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \end{array} \tag{2}$$

По определению степени отображения левая вертикальная стрелка f_* представляет собой умножение на $\deg f$; по определению знака некритической точки правая вертикальная стрелка представляет собой матрицу $1 \times N$ вида $(\mathrm{sgn}(a_1), \dots, \mathrm{sgn}(a_N))^T$.

Горизонтальная стрелка в самой нижней строке представляет собой композицию гомоморфизма $H_n(M_2) \to H_n(M_2, M_2 \setminus \{c\})$ из точной последовательности пары $(M_2, M_2 \setminus \{c\})$, гомоморфизма вырезания $H_n(M_2, M_2 \setminus \{c\}) \to H_n(U, U \setminus \{c\})$ и гомоморфизма $H_n(U, U \setminus \{c\}) \to H_{n-1}(U \setminus \{c\})$ из точной последовательности пары $(U, U \setminus \{c\})$. Первый гомоморфизм является изоморфизмом по теореме 7, второй — по теореме 3, а третий — в силу точности последовательности пары и того, что $H_n(U) = 0 = H_{n-1}(U)$ (случай $n = 1$ разберите самостоятельно). Отсюда вытекает, что горизонтальная стрелка в нижней строке — тождественное отображение (проверьте знаки образующих!), а в верхней строке — матрица $N \times 1$, равная $(1, \dots, 1)$ (почему?).

Тем самым из коммутативности диаграммы (2) вытекает, что $\deg f = 1 \cdot \deg f = (1, \dots, 1) \cdot (\mathrm{sgn}(a_1), \dots, \mathrm{sgn}(a_N))^T = \mathrm{sgn}(a_1) + \dots + \mathrm{sgn}(a_N)$. $\square$

Упражнение 11. Докажите аналог следствия 8 для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В этом случае ориентируемость многообразия не требуется!