ЛЕКЦИЯ 11

Аннотация. Когомологии и умножения.

Напомним основные сведения о сингулярных когомологиях топологических пространств.

Сингулярной n-коцепью пространства X с коэффициентами в кольце R называется гомоморфизм $C_n(X,R) \to R$ модуля сингулярный цепей в R. n-коцепи образуют R-модуль $C^n(X,R) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(C_n(X,R),R)$. Поскольку модуль сингулярных цепей свободный, сингулярная коцепь полностью определяется своими значениями на его образующих — сингулярных симплексах.

Для каждого n определен гомоморфизм $\delta_n : C^n(X,R) \to C^{n+1}(X,R)$, двойственный к гомоморфизму ∂_{n+1} цепей: $\delta_b(\alpha)(c) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\partial_{n+1}c)$ для всех $c \in C_{n+1}(X,R)$, $\alpha \in C^n(X,R)$. Очевидно, гомоморфизмы δ удовлетворяют равенству $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, так что сингулярные коцепи образуют коцепной комплекс, называемый сингулярным коцепным комплексом пространства X; его гомологии называются когомологиями пространства X с коэффициентами в R и обозначаются $H^n(X,R)$, $n = 0,1,\dots$.

Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то для всякого n определен гомоморфизи $f^{\#,n} : C^n(Y,R) \to C^n(X,R)$, двойственный к гомоморфизму $f_{\#,n}$ модулей сингулярных цепей: $f^{\#,n}(\alpha)(c) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(f_{\#,n}(c))$, где $\alpha \in C^n(Y,R)$, $c \in C_n(X,R)$. Гомоморфизмы $f^{\#}$ коммутируют с δ (уточните!), откуда следует, что определены гомоморфизмы когомологий $f^{*,n} : H^n(Y,R) \to H^n(X,R)$ (так же, как для гомологий). Очевидно, $(f \circ g)^{\#,n} = g^{\#,n} \circ f^{\#,n}$, и так же для гомоморфизмов когомологий. Таким образом, сингулярный коцепной комплекс представляет собой контравариантный функтор из категории топологических пространств в категорию коцепных комплексов R-модулей, а когомологии — контравариантный функтор из той же категории в категорию градуированных R-модулей. Так же, как для гомологий, доказывается, что $f^{*,n}$ не меняется при гомотопии отображения f. Следовательно, когомологии представляют собой функтор из гомотопической категории, и когомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Пусть $Y \subset X$; относительными коцепями называются элементы модуля $C^n(X,Y,R) \subset C^n(X,R)$, состоящего из гомоморфизмов α таких, что $\alpha(c) = 0$ для всякой цепи $c \in C_n(Y,R) \subset C_n(X,R)$. Как и для абсолютных коцепей, для относительных коцепей определеляется гомоморфизм δ_n и когомологии.

Основные теоремы о гомологиях, доказанные в курсе — гомотопическая инвариантность, точность последовательностей пары, тройки и Майера–Виеториса, теорема о комплексе “малых” симплексов, теорема о вырезании и др. — имеют очевидный аналог для когомологий. Для клеточных пространств определены (как именно?) клеточные когомологии; они изоморфны сингулярным — доказательство полностью аналогично гомологическому случаю.

Пример 1. Сингулярная 0-коцепь полностью определяется своими значениями на 0-симплексах пространства X, т.е. на точках $a \in X$. Тем самым $C^0(X,R)$ изоморфен модулю $F(X,R)$ всех функций на X со значениями в R. Коцепь α является коциклом (т.е. $\delta\alpha = 0$) тогда и только тогда, когда для всякого сингулярного 1-симплекса, т.е. произвольного непрерывного отображения $f : [0,1] \to X$, имеет место равенство $\alpha(\partial f) = \alpha(f(1)) - \alpha(\gamma(0)) = 0$ — иными словами, функция α постоянна на компонентах линейной связности пространства X. Поскольку 0-кограниц, отличных от 0, не существует, получаем, что $H^0(X,R)$ для произвольного X — модуль R-значных функций на множестве компонент линейной связности пространства X. Если множество компонент линейной связности конечно, то $H^0(X,R)$ изоморфно $H_0(X,R)$.

Синнулярная 1-коцепь аналогичным образом соответствует функции на множестве сингулярных 1-симплексов, т.е. непрерывных кривых $f : [0,1] \to X$. Коцепь α является коциклом, если для всякого сингулярного 2-симплекса, то есть непрерывного отображения $F : \Delta_2 \to X$, имеет место равенство $\alpha(F|_{01}) + \alpha(F|_{12}) = \alpha(F|_{02})$ (имеются в виду ограничения F на стороны треугольника Δ_2 с вершинами 0, 1 и 2, запараметризованные аффинно с заданной ориентацией отрезком $[0,1]$). Иными словами, если $f_1 = F|_{01}$ и $f_2 = F|_{12}$ — произвольные кривые, для которых $f_1(1) = f_2(0) = F(1)$, а $f_3 = F|_{12}$ — произвольная кривая, гомотопная произведению $f_1 \cdot f_2$ (в смысле умножения кривых), то $\alpha(f_3) = \alpha(f_1) + \alpha(f_2)$. Из этого, в частности, вытекает, что $\alpha(f)$ не меняется при гомотопии кривой f с фиксированными концами, и $\alpha(f_1 \cdot f_2) = \alpha(f_1) + \alpha(f_2)$. Нетрудно доказать (проделайте!), что этих двух свойств достаточно для того, чтобы α была коциклом.

Коцепь α является кограницей, если существует функция $\beta : X \to R$ такая, что $\alpha(f) = \beta(f(1)) - \beta(f(0))$ (в этом случае $\alpha = \delta\beta$). Очевидно, что 1-кограница является также и 1-коциклом.

Для произвольных $m \le n$ и $0 \le p_0,\dots,p_m \le n$ обозначим $\iota_{p_0\dots p_m}$ аффинное отображение стандартных симплексов $\Delta_m \to \Delta_n$, переводящее вершину номер i симплекса Δ_m в вершину номер p_i симплекса Δ_n, $0 \le i \le m$. Пусть теперь $\alpha \in C^n(X,R)$, $\beta \in C^k(X,R)$. Символом $\alpha \cup \beta$ обозначается $(n+k)$-коцепь, действующая на сингулярный симплекс $f : \Delta_{n+k} \to X$ по правилу $(\alpha \cup \beta)(f) = \alpha(f \circ \iota_{0\dots n} \cdot \beta(f \circ \iota_{n,\dots,n+k})$; здесь $\cdot$ — умножение в кольце R.

Теорема 2. 1. *Умножение цепей билинейно:* $(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2) \cup \beta = t_1\alpha_1 \cup \beta + t_2\alpha_2 \cup \beta$ $(t_1, t_2 \in R)$ *и аналогично для второго сомножителя.*
2. *Умножение цепей ассоциативно:* $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$.
3. *Умножение цепей функториально: если* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение, то* $f^{\#}(\alpha \cup \beta) = (f^{\#}\alpha) \cup (f^{\#}\beta)$, *где* α, β *— коцепи в* Y.
4. *Умножение удовлетворяет супертождеству Лейбница по отношению к* δ: $\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^n \alpha \cup (\delta\beta)$, *где* $\alpha \in C^n(X, R)$, $\beta \in C^k(X, R)$.

Доказательство — прямая проверка.

Из теоремы вытекает, что корректно определено билинейное и ассоциативное умножение когомологий: пусть $x \in H^n(X, R)$ — класс, представленный коциклом α, а $y \in H^k(X, R)$ — коциклом β. Тогда согласно пункту 4 теоремы 2 коцепь $\alpha \cup \beta$ — коцикл; обозначим $x \cup y \in H^{n+k}(X, R)$ представляемый ею класс когомологий. От выбора коциклов α и β этот класс не зависит: если $\alpha \mapsto \alpha + \delta\gamma$, то $\alpha \cup \beta \mapsto \alpha \cup \beta + (\delta\gamma) \cup \beta = \alpha \cup \beta + \delta(\gamma \cup \beta)$ (последнее равенство — в силу пункта 4 теоремы 2 и условия $\delta\beta = 0$) — другой представитель того же класса; аналогично для β. Из пункта 3 вытекает, что если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то отображение $f^* : H^*(Y, R) \to H^*(X, R)$ сохраняет умножение. Тем самым H^* становится функтором из топологической (или гомотопической) категории в категорию градуированных ассоциативных алгебр над кольцом R.

Пример 3. Модуль $H^0(X, R)$ функций на множестве компонент линейной связности X содержит функцию 1, тождественно равную $1 \in R$. Из определения следует, что $1 \cup \alpha = \alpha \cup 1 = \alpha$ для всякой коцепи (и класса когомологий) α. Тем самым $1 \in H^0(X, R)$ является единицей R-алгебры $H^*(X, R)$.

Теорема 4. *Умножение когомологий суперкоммутативно: если* $\alpha \in C^n(X, R)$, $\beta \in C^k(X, R)$, *то* $\beta \cup \alpha = (-1)^{nk} \alpha \cup \beta$.

Доказательство теоремы отложим до следующей лекции.

Пусть X, Y — топологические пространства, $x \in H^n(X, R)$, $y \in H^k(Y, R)$, и $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ — проекции прямого произведения на сомножители. Обозначим $x \times y \stackrel{\mathrm{def}}{=} p_1^* x \cup p_2^* y \in H^{n+k}(X \times Y, R)$.

Следствие 5 (теорем 2 и 4)**.** *Операция* $\times : H^n(X, R) \times H^k(Y, R) \to H^{n+k}(X \times Y, R)$ *билинейна (над* R*), ассоциативна, суперкоммутативна* $(y \times x = (-1)^{nk} x \times y)$ *и функториальна* $(f^* x \times g^* y = (f \times g)^*(x \times y)$, *где* $f : X_1 \to X_2$ *и* $g : Y_1 \to Y_2$ *— непрерывные отображения, и* $(f \times g) : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$ *задано равенством* $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b)))$.

Можно, наоборот, определить умножение $\cup$ с помощью операции $\times$: пусть $D : X \to X \times X$ — диагональное вложение, заданное формулой $D(a) = (a, a)$ для всех $a \in X$.

Теорема 6. $D^*(y \times z) = y \cup z$, *где* $y \in H^n(X)$, $z \in H^k(X)$.

Доказательство. $D^*(y \times z) = D^*(p_1^* y \cup p_2^* z) = (D^* p_1^*) y \cup (D^* p_2^*) z$ (поскольку D^* — гомоморфизм алгебр) $= (p_1 \circ D)^* y \cup (p_2 \circ D)^* z$ (в силу функториальности) $= y \cup z$, так как $p_1 \circ D = \mathrm{id}_X = p_2 \circ D$. □

Умножение $\times$ — билинейная операция и, следовательно, может рассматриваться как отображение $\times : H^*(X, R) \otimes_R H^*(Y, R) \to H^*(X \times Y, R)$, переводящее $a \otimes b$ в $a \times b$. Тензорное произведение можно наделить структурой суперградуированной ассоциативной R-алгебры, полагая по определению $(a \otimes b) \cup (c \otimes d) = (-1)^{n_2 k_1} (a \cup c) \otimes (b \cup d)$, где $a \in H^{n_1}(X, R)$, $b \in H^{k_1}(Y, R)$, $c \in H^{n_2}(X, R)$, $d \in H^{k_2}(Y, R)$. В этом случае, очевидно, $\times$ является гомоморфизмом R-алгебр.

Теорема 7. *Если для всякого* k *модуль* $H^k(Y, R)$ *свободен (например, если* R *— поле) и конечно порожден (например,* Y *компактно), то отображение* $\times : H^n(X, R) \otimes H^k(Y, R) \to H^{n+k}(X \times Y, R)$ *— изоморфизм.*

Замечание. Теорема 7 — частный случай формулы Кюннета. В общем виде (для произвольных топологических пространств X и Y и без предположений о структуре гомологий Y) формула Кюннета утверждает, что образ гомоморфизма $\times$ входит в $H^*(X \times Y, R)$ в качестве прямого слагаемого, и содержит описание остальных слагаемых.

Пример 8. Индукцией по n с применением последовательности Майера–Виеториса (полностью аналогично гомологическому случаю) доказывается $H^0(S^n, R) = H^n(S^n, R) = R$ для всех n и $H^k(S^n, R) = 0$ при $k \neq n$; здесь R — произвольное кольцо. Элемент $1 \in H^0(S^n, R) = R$ является, согласно примеру 3, единицей при умножении. Если $x \in H^n(S^n, R) = R$ — образующая, то $x \cup x \in H^{2n}(X, R) = 0$, то есть $x \cup x = 0$. Тем самым R-алгебра $H^*(S^n, R)$ изоморфна $R[x]/(x^2)$, где образующая $x \in H^n(S^n, R)$ (как говорят, имеет градуировку, или степень, n).

Поскольку $H^i(S^n, R)$ при всех i свободны и конечно порождены, из теоремы 7 вытекает, что алгебра $H^*(S^n \times \dots \times S^n)$ (m сомножителей) изоморфна $R[x]/(x^2)^{\otimes m} = R[x_1, \dots, x_m]^{\mathrm{super}}/(x_1^2, \dots, x_m^2)$, где знак $^{\mathrm{super}}$ означает, что умножение образующих суперкоммутативно: $x_j x_i = (-1)^{n^2} x_i x_j = (-1)^n x_i x_j$ (иными словами, если n четно, то $R[x_1, \dots, x_m]^{\mathrm{super}}$ — алгебра многочленов, а если n нечетно — то грассмановых многочленов).

Пример 9. Пусть $R = \mathbb{Z}$. Комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфна S^2; из утверждений примера 8 вытекает, что $H^*((\mathbb{C}P^1)^n) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2, \dots, x_n^2)$; умножение в кольце многочленов коммутативное. Рассмотрим отображение $f_n : (\mathbb{C}P^1)^n \to \mathbb{C}P^n$, заданное формулой $f([z_1 : w_1], \dots, [z_n : w_n]) \stackrel{\text{def}}{=} [u_0 : \dots : u_n]$, где $u_0 t^n + u_1 t^{n-1} s + \dots + u_n s^n = (tz_1 - sw_1) \dots (tz_n - sw_n)$.

Правая часть этого равенства — однородный многочлен степени n (поскольку не все u_i равны нулю); он обращается в нуль на прямых $\{(t, s) \in \mathbb{C}^2 \mid tz_i = sw_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Набор этих прямых определяет многочлен с точностью до пропорциональности (т.е. точку в $\mathbb{C}P^n$ — однозначно). Однородный многочлен от 2 переменных степени n над полем $\mathbb{C}$ однозначно, с точностью до общего числового множителя, разлагается на линейные множители (почему?) и, следовательно, определяет набор прямых (т.е. точек $\mathbb{C}P^1$) с точностью до перестановки. Следовательно, прообраз $f^{-1}(u)$ точки общего положения (соответствующей многочлену без кратных корней) состоит из $n!$ точек.

Лемма 10. *Пусть $h = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — отображение, где $h_1, \dots, h_n$ — рациональные функции n комплексных переменных; пусть $h_k(z) = f_k(z) + ig_k(z)$, где $f_k, g_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $h^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, заданное формулой $h^{\mathbb{R}}(x_1, \dots, x_{2n}) = (f_1(x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}), g_1(x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}), \dots, f_n(\dots), g_n(\dots))$. Тогда $\det(h^{\mathbb{R}})'(x_1, \dots, x_{2n}) = |\det A|^2$, где A — матрица $n \times n$ с комплексными коэффициентами $\frac{\partial h_k}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n)$, $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $j = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть $\frac{\partial h_k}{\partial z_j} = a_{kj} + ib_{kj}$, тогда $h_k(z_1, \dots, z_k + u, \dots, z_n) = (a_{kj} + ib_{kj})u + o(|u|)$, $u \to 0$, откуда $f_k(z_1, \dots, z_j + u, \dots, z_n) = \mathrm{Re}((a_{kj} + ib_{kj})u) + o(|u|)$, и аналогично для g_k. Следовательно, $(h^{\mathbb{R}})_{2k-1}(x_1, \dots, x_{2j-1} + v, \dots, x_{2n}) = f_k(z_1, \dots, z_j + v, \dots, z_n) = a_{kj} v + o(v)$, откуда $\frac{\partial h^{\mathbb{R}}_{2k-1}}{\partial x_{2j-1}} = a_{kj}$ (напомним, что $v \in \mathbb{R}$, так что $\mathrm{Re}(a_{kj} + ib_{kj})v = a_{kj} v$). Аналогично доказывается, что $\frac{\partial h^{\mathbb{R}}_{2k}}{\partial x_{2j}} = a_{kj}$ и $\frac{\partial h^{\mathbb{R}}_{2k-1}}{\partial x_{2j}} = b_{kj} = -\frac{\partial h^{\mathbb{R}}_{2k}}{\partial x_{2j-1}}$. Следовательно, $(h^{\mathbb{R}})'(x)$ — матрица из $n \times n$ блоков 2×2 вида $M[a_{kj} + ib_{kj}] = \begin{pmatrix} s_{kj} & -b_{kj} \\ b_{kj} & a_{kj} \end{pmatrix}$.

Приведем матрицу A к верхнетреугольному виду с диагональными элементами $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \dots, \lambda_n + i\nu_n$. Делая с матрицей $(h^{\mathbb{R}})'(x)$ аналогичные преобразования с парами строк и столбцов, получим блочно-верхнетреугольную матрицу с блоками $M[\lambda_1], \dots, M[\lambda_n]$ на диагонали. Определитель A равен $\lambda_1 \dots \lambda_n$; если же представить $\det(h^{\mathbb{R}})'(x)$ как сумму мономов от матричных элементов, занумерованных перестановками чисел $1, \dots, 2n$, то ненулевое значение принимают только мономы, соответствующие перестановкам, переводящих каждую пару $\{2k-1, 2k\}$ в себя. Таких перестаовок 2^n и сумма по ним равна $(\mu_1^2 + \nu_1^2) \dots (\mu_n^2 + \nu_n^2) = |\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2 = |\det A|^2$. □

$\mathbb{C}P^n$ — гладкое многообразие размерности $2n$, обладающее атласом $U_0 \cup \dots \cup U_n$, где $U_i \stackrel{\text{def}}{=} \{[u_0 : \dots : u_n] \mid u_i \neq 0\}$; координата $x^{(i)}([u_0 : \dots : u_n]) = (u_0/u_i, \dots, u_n/u_i) \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. В частности, при $n = 1$ многообразие $\mathbb{C}P^1$ покрыто картами $V_0 \cup V_1$ с координатами $y_0 : V_0 \to \mathbb{C}$ и $y_1 : V_1 \to \mathbb{C}$, так что $(\mathbb{C}P^1)^n$ покрыто 2^n картами $V_{i_1 i \dots i_n} \stackrel{\text{def}}{=} V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$, где каждый индекс $i_k \in \{0, 1\}$; соответствующие координаты $y_{i_1, \dots, i_n} = (y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) : V_{i_1, \dots, i_n} \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Следствие 11 (леммы 10). *Многообразие $\mathbb{C}P^n$ ориентируемо.*

Доказательство. Отображения перехода в координатах $x^{(j)}$ — наборы n рациональных функций n переменных. □

Следствие 12 (следствия 11). *Многообразие $(\mathbb{C}P^1)^n$ ориентируемо.*

Компоненты отображения f в координатах $(y_{i_1, \dots, i_n}, x^{(j)})$ — рациональные функции n комплексных переменных.

Следствие 13. *Знак любой некритической точки отображения f — положительный. Степень отображения f равна $n!$.*

Клеточное разбиение $\mathbb{C}P^n$ содержит по одной клетке размерностей $0, 2, \dots, 2n$. Следовательно, дифференциалы в коцепном клеточном комплексе равны 0 (нет клеток соседних размерностей), откуда $H^{2k}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ при $k = 0, 1, \dots, n$; остальные когомологии нулевые. Обозначим $y_k \in H^{2k}(\mathbb{C}P^n)$ образующую.

Старшие гомологии $H^{2n}((\mathbb{C}P^1)^n)$ — компонента алгебры $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{2n}]/(x_1, \dots, x_n)$ степени $2n$. Она изоморфна $\mathbb{Z}$ (как и должно быть: $(\mathbb{C}P^1)^n$ — ориентируемое компактное многообразие размерности $2n$) и порождена элементом $x_1 \dots x_n$ (напомним, что степень каждого $x_i \in H^2(\mathbb{C}P^1)$ равна 2).

Обозначим $q_i : \mathbb{C}P^1 \to (\mathbb{C}P^1)^n$ вложение $\mathbb{C}P^1$ в качестве i-го смножителя: $q_i([z : w]) = ([0 : 1], \dots, [0 : 1], [z : w], [0 : 1], \dots, [0 : 1])$ ($[z : w]$ на i-ом месте), $0 \le i \le n$. Пусть также $p_k : (\mathbb{C}P^1)^n \to \mathbb{C}P^1$, наоборот, — проекция на k-ый сомножитель. Очевидно, $p_k \circ q_i = \mathrm{id}_{\mathbb{C}P^1}$, если $i = k$, и является отображением в точку, если $i \neq k$. Обозначим $x \in H^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$ образующую; получим, что $q_i^*(x_k) = q_i^*(p_k^*(x)) = x$, если $i = k$ и 0, если $i \neq k$. В то же время $f_n \circ q_i : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ — тождественное отображение $\mathbb{C}P^1$ в $\mathrm{sk}_2(\mathbb{C}P^n) = \{[0 : \dots : 0 : u_{n-1} : u_n]\} = \mathbb{C}P^1$. Образующая $H^2(\mathrm{sk}_2(\mathbb{C}P^n))$ соответствует клеточному коциклу e_2 (двумерная клетка в $\mathbb{C}P^n$), то есть образующей $y_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n)$. Отсюда вытекает, что $q_i^*(f^*(y_1)) = x$ для всех $i = 0, \dots, n$ и, следовательно, $f^*(y_1) = x_1 + \dots + x_n \in H^2((\mathbb{C}P^1)^n)$.

Отображение f^* — гомоморфизм алгебр. Из этого вытекает, что $f^*(y_1^n) = (x_1 + \dots + x_n)^n = n! x_1 \dots x_n$ (остальные мономы содержат переменные в степени, большей 1 и, следовательно, равны нулю). С другой стороны, $f^*(y_n) = n! x_1 \dots x_n$, поскольку $y_n \in H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ и $x_1 \dots x_n \in H^{2n}((\mathbb{C}P^1)^n)$ — образующие, а $\deg f = n!$ согласно следствию 13. Отображение $f^{*,2n} : \mathbb{Z} = H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2n}((\mathbb{C}P^1)^n) = \mathbb{Z}$ представляет собой умножение на $n!$ и, следовательно, имеет тривиальное ядро. Поэтому из $f^*(y_n) = f^*(y_1^n)$ вытекает, что $y_1^n = y_n$ в $H^*(\mathbb{C}P^n)$. Поскольку $\mathrm{sk}_k(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}P^k$, получается равенство $y_1^k = y_k$ при всех $k = 0, \dots, n$. Таким образом, алгебра $H^*(\mathbb{C}P^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}[y]/(y^{n+1})$, где умножение в кольце многочленов коммутативное, а степень образующей y равна 2.

Из доказанного следует, например, такой факт:

Теорема 14. *Степень любого непрерывного отображения $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ представляет собой n-ую степень целого числа. В частности, если n четно, то степень неотрицательна — например, не существует диффеоморфизма $\mathbb{C}P^n$ в себя, обращающего ориентацию.*

Доказательство. Пусть $x \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — образующая; тогда $f^*(x) = ax$ для некоторго $a \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $f^*(x^n) = a^n x^n$, то есть $\deg f = a^n$. □