ЛЕКЦИЯ 12

Аннотация. Доказательство упрощенной формулы Кюннета и суперкоммутативности умножения когомологий. Теорема Борсука–Улама.

Доказательство теоремы 7 лекции 11

Зафиксируем пространство Y и обозначим $h^n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^n(X\times Y, R)$ и $u^n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^n H^k(X,R)\otimes H^{n-k}(Y,R)$. Умножение $\times$ порождает гомоморфизм $\mu_n(X) : u^n(X) \to h^n(X)$ для всех X и всех n. Относительные варианты h^n и u^n: $h^n(X,Z) = H^n(X\times Y, Z\times Y, R)$ и $u^n(X,Z) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^n H^k(X,A,R)\otimes H^{n-k}(Y,R)$; здесь тоже есть гомоморфизм $\mu_n(X,A)$ (как он определяется?).

Для любого непрерывного отображения $f : Z \to X$ определены гомоморфизмы $f_h^{*,n} : h^n(X) \to h^n(Z)$ и $f_u^{*,n} : u^n(X) \to u^n(Z)$: $f_h^{*,n} \stackrel{\text{def}}{=} (f\times \mathrm{id}_Y)^{*,n}$ и $f_u^{*,n} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^n (f^{*,k}\otimes \mathrm{id}_{H^{n-k}(Y)})$.

Лемма 1 (свойства отображений f_u^* и f_h^*). 1. *f_h^* и f_u^* гомотопически инвариантны.*
2. *f_h^* и f_u^* коммутируют с μ: $\mu_n(Z)\circ f_u^{*,n} = f_h^{*,n}\circ \mu_n(X)$.*

Доказательство леммы очевидно.

Пусть теперь X — клеточное пространство; докажем индукцией по n, что $\mu(\operatorname{sk}_n X)$ — изоморфизм. База индукции $n=0$: остов $\operatorname{sk}_0(X)$ — дискретное пространство из k точек, так что $h^n(\operatorname{sk}_0 X) = H^n(Y^k) = (H^n(Y))^k$, и $u^n(X) = H^0(X)\otimes H^n(Y) = R^k\otimes H^n(Y) = (H^n(Y))^k$, так что $\mu_n(X)$ — изоморфизм.

Чтобы сделать шаг индукции, заметим, что для h^* определена точная последовательность пары: $\dots \to h^{n-1}(Z) \xrightarrow{\lambda_{n-1}} h^n(X,Z) \xrightarrow{p^*} h^n(X) \xrightarrow{\iota^*} h^n(Z) \xrightarrow{\lambda_n} h^{n+1}(X,Z) \to \dots$ — это точная когомологическая последовательность пары $(X\times Y, Z\times Y)$. Оказывается, для u^* в наших предположениях такая последовательность тоже определена: мы предположили, что $H^s(Y,R) = R^{\ell_s}$, так что тензорное произведение когомологической точной последовательности пары (X,Z) на $H^s(Y,R)$ — прямая сумма ℓ_s экземпляров этой последовательности, то есть опять точная последовательность, которую мы назовем Q_s. Точная последовательность пары для u^* — прямая сумма последовательностей $Q_s[s]$, где $[s]$ означает сдвиг градуировки на s (что, очевидно, не влияет на точность. Прямая сумма точных последовательностей — точная последовательность). Члены точной последовательности пары выглядят так же, как для h^* (и как для когомологий): $\dots \to u^{n-1}(Z) \xrightarrow{\lambda_{n-1}} u^n(X,Z) \xrightarrow{p^*} u^n(X) \xrightarrow{\iota^*} u^n(Z) \xrightarrow{\lambda_n} u^{n+1}(X,Z) \to \dots$.

Лемма 1 (продолжение). 3. *μ коммутирует с гомоморфизмами в точной последовательности пары.*

Доказательство — упражненение.

В дальнейшем нам потребуется такое алгебраическое утверждение:

Лемма 2 (5-лемма). *Пусть в коммутативной диаграмме R-модулей и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
\downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array}$$

строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Тогда r — изоморфизм.

Доказательство 5-леммы — задача из листка 3.

Пусть B_n — n-мерный замкнутый шар, $\partial B_n = S^{n-1}$ — его граница. Применим 5-лемму к коммутативной диаграмме, образованной точными последовательностями пары $(B_n, \partial B_n)$ для h^* и u^* и отображениями μ_n между ними. Гомоморфизм $\mu_k(B_n) : u^k(B_n) \to h^k(B_n)$ — изоморфизм, потому что B_n стягиваем (свойство 1 из леммы 1); гомоморфизм $\mu_k(\partial B_n) : u^k(\partial B_n) \to h^k(\partial B_n)$ — изоморфизм по предположению индукции ($\partial B_n = S^{n-1} = \operatorname{sk}_{n-1}(S^{n-1})$ — клеточное пространство размерности $n-1$). Из 5-леммы вытекает, что $\mu_k(B_n, \partial B_n) : u^k(B_n,\partial B_n) \to h^k(B_n, \partial B_n)$ — также изоморфизм.

Пусть $\{e_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ — совокупность n-мерных клеток пространства X, $\chi_\alpha : B_n \to X$ — характеристическое отображение клетки e_α. Обозначим $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} B_n$; $\partial Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \partial B_n$. Тогда определено отображение $\chi : Z \to \operatorname{sk}_n X$, равное χ_α на копии B_n с индексом α для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Согласно лемме Борсука (почему она здесь применима?) $h^k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) = h^k(\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X))$, $h^k(Z, \partial Z) = h^k(Z/\partial Z)$ и аналогично для u^k. Пространства $Z/\partial Z$ и $\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X)$ оба гомеоморфны букету сфер $\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} S^n$; отображение χ — гомеоморфизм между ними. Следовательно, $\chi_h^* : h^k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to h^k(Z, \partial Z)$ и аналогичный гомоморфизм χ_u^* — изоморфизмы. Отсюда и из пункта 2 леммы 1 вытекает, что $\mu_k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ — изоморфизм.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму из точных последовательностей пары $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ для h и u и гомоморфизов μ между ними. Гомоморфизм $\mu_k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) : u^k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to h^k(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ — изоморфизм по доказанному; гомоморфизм $\mu_k(\mathrm{sk}_{n-1}(X)) : u^k(\mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to h^k(\mathrm{sk}_{n-1}(X))$ — изоморфизм по предположению индукции; теперь из 5-леммы вытекает, что $\mu_k(\mathrm{sk}_n(X)) : u^k(\mathrm{sk}_n(X)) \to h^k(\mathrm{sk}_n(X))$ — также изоморфизм, что и завершает индукцию.

Теперь если X — клеточное пространство размерности n, то $X = \mathrm{sk}_n(X)$, так что $\mu_k(X)$ — изоморфизм. Для бесконечномерных клеточных пространств изоморфность вытекает из того, что любая сингулярная цепь в клеточном пространстве лежит в одном из остовов — ср. с доказательством теоремы о совпадении клеточных и сингулярных гомологий.

Доказательство суперкоммутативности умножения когомологий

Пусть $\iota_n : \Delta_n \to \Delta_n$ — аффинное преобразование, переставляющее вершины стандартного симплекса в обратном порядке, а $\varrho_n : C_n(X) \to C_n(X)$ — гомоморфизм модулей, действующий на образующих — сингулярных симплексах — по правилу $\varrho_n(f) = (-1)^{n(n+1)/2} f \circ \iota_n$. Тогда из определения умножения коцепей следует, что если $\alpha \in C^n(X)$, $\beta \in C^k(X)$, то $(\varrho_k^\# \beta \cup \varrho_n^\# \alpha = (-1)^{-n(n+1)/2 - k(k+1)/2 + (n+k)(n+k+1)/2} \varrho_{n+k}^\#(\alpha \cup \beta) = (-1)^{nk} \varrho_{n+k}^\#(\alpha \cup \beta)$.

Докажем, что отображение $\varrho_n^\#$ цепногомотопно тождественному. Для этого рассмотрим разбиение призмы $\Delta_n \times [0,1]$ на симплексы $Q_{n,\ell}$, $\ell = 0, \dots, n$, как в доказательстве гомотопической инвариантности гомологий в лекции 3. Пусть $\chi_{n,\ell} : \Delta_n \to Q_{n,\ell}$ — характеристическое отображение симплекса (см. конструкцию в лекции 3), а $\nu_{n,\ell} : Q_{n,\ell} \to Q_{n,\ell}$ — аффинное отображение, переводящее все вершины $Q_{n,\ell}$, лежащие в нижнем основании $\Delta_n \times \{0\}$ призмы, в себя, и обращающее порядок вершин, лежащих в верхнем основании призмы. Положим по определению $K_n(f) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell + (n-\ell)(n-\ell+1)/2} (f \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \nu_{n,\ell} \circ \chi_{n,\ell}$.

Упражнение 3. Проверьте непосредственным вычислением, что $K_{n+1}\delta + \delta K_n = \varrho_n - \mathrm{id}$.

Из упражнения 3 вытекает, что $\varrho_n^* = \mathrm{id}_{H^n(X)}$. Таким образом, если $y \in H^n(X)$, $z \in H^k(X)$ — классы, представляемые коциклами α и β, то $z \cup y = [\beta \cup \alpha] = [\varrho_{n+k}^\#(\beta \cup \alpha)] = (-1)^{nk}[\varrho_n^\# \alpha \cup \varrho_k^\# \beta] = (-1)^{nk} \varrho_n^* y \cup \varrho_k^* z = (-1)^{nk} y \cup z$.

Теорема Борсука–Улама и другие примеры.

Пример 4. Пусть $X_n = S^2 \vee S^4 \vee \dots \vee S^{2n}$. Пространство X_n имеет очевидное клеточное разбиение, содержащее по одной клетке размерности $0, 2, \dots, 2n$. Следовательно, дифференциал в коцепном клеточном комплексе нулевой, и $H^k(X_n) = \mathbb{Z}$ при $k = 0, 2, \dots, 2n$; остальные когомологии нулевые. Обозначим $x_i \in H^{2i}(X_n)$ образующую.

Пусть $q_k : S^{2k} \to X_n$ — вложение сферы в букет. Отображение q_k клеточное, откуда вытекает, что $q_k^*(x_k) = y_k$, где $y_k \in H^{2k}(S^{2k})$ — образующая. Следовательно, q_k^* — изоморфнзм H^{2k} (и нулевое отображение в остальных когомологиях).

Поскольку q_k^* — гомоморфизм алгебр, получим $q_k^*(x_i \cup x_j) = q_k^*(x_i) \cup q_k^*(x_j) = 0$ при $(i,j) \neq (0,0)$ (произведение любых классов когомологий положительной степени в когомологиях сферы нулевое). Положим теперь $k = i + j$; тогда $x_i \cup x_j \in H^{2k}(X_n)$, и q_k^* — изоморфизм. Следовательно, $x_i \cup x_j = 0$ — умножение в $H^*(X_n)$, кроме H^0, нулевое.

Тем самым $H^k(X_n)$ изоморфна $H^k(\mathbb{C}P^n)$ при всех k, но $H^*(X_n)$ и $H^*(\mathbb{C}P^n)$ не изоморфны как алгебры. Следовательно, пространства X_n и $\mathbb{C}P^n$ гомотопически не эквивалентны.

Теорема 5 (Борсука–Улама)**.** *Не существует нечетного непрерывного отображения $f : S^n \to S^{n-1}$. Эквивалентным образом, если $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нечетное отображение, то существует точка $x \in S^n$ такая, что $g(x) = 0$.*

Доказательство. У утверждения про кольцо $H^*(\mathbb{C}P^n)$ есть вещественный аналог: $H^*(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x_k]/(x_k^{k+1})$; здесь $x_k \in H^1(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — образующая (она же единственный ненулевой элемент). Мы докажем его на семинаре.

Нетрудно доказать (проделайте!), что если $\alpha_k \in C^1(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — сингулярный 1-коцикл, представляющий x_k, а $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}P^k$ — замкнутая кривая (и тем самым 1-цикл), то $\alpha_k(\gamma) = 0$, если γ стягиваема, и 1, если нестягиваема (напомним, что $\pi_1(\mathbb{R}P^k) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так что существует всего два класса гомотопии замкнутых кривых).

Пусть теперь $f : S^n \to S^{n-1}$ — нечетное отображение, то есть $m_{n-1} \circ f = f \circ m_n$; здесь $m_k : S^k \to S^k$ действует по формуле $m_k(x) = -x$. Обозначим $p_k : S^k \to S^k/m_k = \mathbb{R}P^k$ проекцию на фактор, и пусть $F : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^{n-1}$ — отображение, для которого $F \circ p_n = p_{n-1} \circ f$. Отображение p_k является накрытием; поэтому для каждой замкнутой кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}P^k$ определено ее поднятие $\Gamma : [0,1] \to S^k$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}P^n$ — нестягиваемая замкнутая кривая. Тогда $\Gamma(0) = -\Gamma(1)$, откуда $f(\Gamma(0)) = -f(\Gamma(1)$ и, следовательно, кривая $F \circ \gamma$ также нестягиваемая. Следовательно, $\alpha_{n-1}(F \circ \gamma) = 1$, откуда вытекает, что $F^* x_{n-1} = x_n \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Поскольку F^* — гомоморфизм алгебр, получим $F^*(x_{n-1}^n) = x_n^n$. Но $x_{n-1}^n = 0$ (поскольку $H^n(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$), а $x_n^n \neq 0$ (это образующая $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. $\square$