1. ДВУМЕРНЫЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Задачи, отмеченные кружком, разбирались на семинаре; если вы в семинаре не участвовали, то с них и нужно начинать. Задачи без кружка — для самостоятельного решения.

Двумерные симплициальные комплексы — двумерные аналоги графов. Обозначим $T \subset \mathbb{R}^3$ правильный треугольник (плоский, разумеется!) с вершинами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Двумерный симплициальный компле́кс (коротко 2-комплекс) — топологическое пространство, полученное из набора треугольников (*граней*) склейкой каких-то их сторон по аффинным гомеоморфизмам этих сторон, а также склейкой каких-то вершин.

Чуть формальнее, 2-комплекс определяется набором множеств $T_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$, называемых *гранями*, аффинных гомеоморфизмов $\chi_\alpha : T \to T_\alpha$, аффинных *гомеоморфизмов склейки* $\kappa_{\alpha,i}^{\beta,j}$, $\alpha,\beta \in \mathfrak{A}$, $i,j \in \{1,2,3\}$, действующих из i-й стороны грани T_α в j-ю сторону грани T_β, и пар вершин (u,v), $u \in T_\alpha$, $v \in T_\beta$ (при этом разрешается $\alpha = \beta$). Для гомеоморфизмов склейки должно выполняться равенство $\kappa_{\beta,j}^{\gamma,k} \circ \kappa_{\alpha,i}^{\beta,j} = \kappa_{\alpha,i}^{\gamma,k}$, если гомеоморфизмы склейки в левой части этого равенства определены (иными словами, если точка a на стороне одного треугольника приклеена к точке b на стороне второго, а та — к точке c на стороне третьего, то точка a приклеивается именно к точке c, а не к какой-нибудь иной точке на той же стороне). Также предположим, что $\kappa_{\alpha,i}^{\beta,j} = (\kappa_{\beta,j}^{\alpha,i})^{-1}$ (если точка a приклеена к точке b, то точка b — к точке a). 2-комплекс получается из дизъюнктного объединения треугольников $T_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$, склейкой точек a и $\kappa_{\alpha,i}^{\beta,j}(a)$ по всем α,β,i,j и всем точкам a на i-й стороне треугольника T_α, а также всех пар вершин u и v.

Стороны треугольниов T_α (отождествленные согласно склейкам) называются ребрами 2-комплекса, а вершины (тоже отождествленные) — вершинами 2-комплекса.

Как и в случае графов, пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. 2-комплексу сопоставляются три свободных K-модуля — V_0, порожденный множеством вершин, V_1, порожденный множеством ребер, и V_2, порожденный множеством граней — и два гомоморфизма модулей $\partial_2 : V_2 \to V_1$ и $\partial_1 : V_1 \to V_0$.

Объединение $\mathrm{sk}(U)$ ребер и вершин 2-комплекса U — граф (называемый остовом). Гомоморфизм $\partial_1 : V_1(U) \to V_0(U)$ определяется как гомоморфизм ∂ для этого графа (описанный в лекции 1). Определим гомоморфизм ∂_2. Пусть T_α — грань 2-комплекса. Стороны T_α принадлежат ребрам e_1, e_2, e_3 того же 2-комплекса, которым соответствуют образующие модуля V_1. Гомоморфизм ∂_2 задается формулой $\partial_2 T_\alpha = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1$ — знаки, зависящие от выбранной ориентации грани T_α и ребер e_1, e_2, e_3.

Задача 1^0. Дайте определение знаков $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ так, чтобы выполнялось следующее: при смене ориентации ребра меняется соответствующий знак, а при смене ориентации грани — все три знака, и при этом выполняется равенство $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.

Указание. Напомним, что оператор ∂_1 также зависит от выбора ориентации ребер.

Обозначим $Z_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_2 = \{x \in V_2 \mid \partial_2 x = 0\} \subset V_2$ и аналогично $Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1 \subset V_1$ ядра гомоморфизмов; также обозначим $B_2 = \operatorname{Im} \partial_2 = \{\partial_2 x \mid x \in V_2\} \subset V_1$ и $B_1 = \operatorname{Im} \partial_1 \subset V_0$ их образы. Утверждение задачи 1^0 эквивалентно включению $B_2 \subset Z_1$; теперь гомологии 2-комплекса определяются как фактор-модули $H_0 = V_0/B_1$, $H_1 = Z_1/B_2$, и $H_2 = Z_2$.

Задача 2^0. Опишите поверхность правильного тетраэдра как 2-комплекс и вычислите его гомологии.

Задача 3. а) Рассмотрим склейку тора из квадрата, разбитого на два треугольника — 2-комплекс с двумя гранями, гомеоморфный двумерному тору. Вычислите его гомологии. б) Тот же вопрос, где вместо тора проективная плоскость.

Барицентрическим подразделением 2-комплекса называется новый 2-комплекс, в котором каждое ребро старого разделено пополам (в середине ребра ставится новая вершина валентности 2), а каждая грань — на 6 граней, полученных проведением медиан в треугольнике (при этом в центре треугольника ставится новая вершина, а отрезки медиан, соединяющие эту вершину с вершинами и серединами сторон треугольника, становятся новыми ребрами, к каждому из которых примыкают по 2 грани).

Задача 4. Дайте формальное определение барицентрического подразделения и докажите, что оно не изменяет гомологии 2-комплекса.

Непрерывное отображение $f : U \to W$ одного 2-комплекса в другой называется клеточным, если вершины переходят в вершины, а ребра — в объединение вершин и ребер. Тем самым определено клеточное отображение $\mathrm{sk}(f) : \mathrm{sk}(U) \to \mathrm{sk}(W)$. Гомоморфизмы модулей $f_{\sharp,i} : V_i(U) \to V_i(W)$ при $i = 0,1$ определяются так же, как для отображения графов $\mathrm{sk}(U) \to \mathrm{sk}(W)$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{R}P^2$ — 2-комплекс, описанный в задаче 3б, а $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — стандартное двулистное накрытие. а) Введите в S^2 такую структуру 2-комплекса, чтобы f стало клеточным отображением. б) Вычислите гомоморфизмы $f_{\sharp,i}$ при $i = 0, 1$. в) Придумайте гомоморфизм $f_{\sharp,2} : V_2(S^2, K) \to V_2(\mathbb{R}P^2, K)$, удовлетворяющий аналогу пункта 1 теоремы 3 лекции 1 (коммутативность диаграммы). г) Вычислите, аналогично лекции 1, гомоморфизмы в гомологиях $f_{*,i} : H_i(S^2, K) \to H_i(\mathbb{R}P^2, K)$ при $i = 0, 1, 2$.

Общее определение гомоморфизмов $f_{\sharp,2}$ требует понятия степени отображения двумерных сфер и будет дано позднее (и в бóльшей общности). Тогда же будет доказана, по аналогии с лекцией 1, гомотопическая инвариантность отображений f_* и совпадение гомологий у гомотопически эквивалентных 2-комплексов.