2. ВЫЧИСЛЕНИЕ H_1

Задачи, отмеченные кружком, разбирались на семинаре; если вы в семинаре не участвовали, то с них и нужно начинать. Задачи без кружка — для самостоятельного решения.

Задача 1^0. Пусть $f : X \to Y$ — произвольное непрерывное отображение топологических пространств. Опишите гомоморфизм $f_* : H_0(X, R) \to H_0(Y, R)$.

Обозначим $p : \mathbb{R} \to S^1$ универсальное накрытие над окружностью. Пусть $u : [0, 1] \to S^1$ — одномерный сингулярный симплекс (т.е. кривая) на окружности, а $U : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — произвольное его поднятие, т.е. отображение, для которого $p \circ U = u$. Число $\operatorname{ind} u \stackrel{\text{def}}{=} U(1) - U(0) \in \mathbb{R}$ назовем индексом симплекса u; очевидно, оно не зависит от выбора поднятия.

Задача 2^0. Пусть $x = \sum_{i=1}^N k_i u_i \in C_1(S^1, \mathbb{Z})$ — сингулярная 1-цепь в S^1 (коэффициенты $k_i \in \mathbb{Z}$). Докажите, что если $x \in C_1(S^1, \mathbb{Z})$ является циклом (то есть $\partial x = 0$), то $\operatorname{ind} x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N k_i \operatorname{ind} u_i \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. а) Докажите, что если цикл x является границей (то есть $x = \partial y$ для некоторго $y \in C_2(S^1, \mathbb{Z})$), то $\operatorname{ind} x = 0$. б) Докажите, что если x — цикл и $\operatorname{ind} x = 0$, то x является границей. в^0) Докажите, что $H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Задача 4. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — отображение степени d (то есть $f_* : \pi_1(S^1, a) \to \pi_1(S^1, f(a))$ — гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, представляющий собой умножение на d). Докажите, что $f_{*,1} : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \to H_1(S^1, \mathbb{Z})$ — также умножение на d.

Задача 5. Пусть X — топологическое пространство. а) Пусть $f : S^1 \to X$ — непрерывное отображение, а $p : [0, 1] \to S^1$ — стандартная параметризация ($p(t) = e^{2\pi i t} \in S^1 \subset \mathbb{C}$). Докажите, что сингулярный симплекс $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} f \circ p : [0, 1] \to X$ является циклом, и что σ — граница тогда и только тогда, когда f гомотопно отображению в точку (стягиваемо). б) Докажите, что если фундаментальная группа $\pi_1(X, a)$ тривиальна, то $H_1(X) = 0$.

Замечание. В дальнейшем будет доказано (но пока сложно), что $H_1(X, \mathbb{Z})$ зависит только от $\pi_1(X)$ и равна (для линейно связного X)$\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, где $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ — коммутант группы, т.е. нормальная подгруппа в $\pi_1(X)$, порожденная всеми коммутаторами — элементами вида $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1}$. Тем самым утверждение, обратное к задаче 5б, неверно — из $H_1(X) = 0$ следует только, что $\pi_1(X)$ совпадает со своим коммутантом (такие группы есть — например, группа четных перестановок $n \geq 5$ элементов. А вот группа всех перестановок с коммутантом не совпадает, т.к. всякий коммутатор — четная перестановка. Коммутатор коммутативной группы тривиален, в этом случае $H_1(X)$ изоморфна $\pi_1(X)$.)

Задача 6. Пусть $X = S^1 \vee S^1$ — букет двух окружностей, $p_1, p_2 : X \to S^1$ — отображения, переводящие первую (соотв., вторую) окружность букета в S^1 гомеоморфно, а вторую (соотв., первую) — в точку. а) Пусть $x \in C_1(X, \mathbb{Z})$ — граница. Докажите, что $\operatorname{ind}(p_1)_{\#,1}(x) = \operatorname{ind}(p_2)_{\#,1}(x) = 0$. б) Докажите, что если x — цикл, и $\operatorname{ind}(p_1)_{\#,1}(x) = \operatorname{ind}(p_2)_{\#,1}(x) = 0$, то x — граница. в) Вычислите $H_1(X, \mathbb{Z})$.