5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МАЙЕРА–ВИЕТОРИСА

Задача 1. а) Двумерный тор X это объединение двух цилиндров A и B (гомеоморфных $S^1 \times (0,1)$), пересекающихся по малым окрестностям обоих оснований ($S^1 \times (0,\varepsilon)$ и $S^1 \times (1-\varepsilon, 1)$ соответственно). Вычислите в данной ситуации последовательность Майера–Виеториса (то есть все входящие в нее модули гомологий и гомоморфизмы между ними). б) Бутылка Клейна K это объединение двух цилиндров A и B по малым окрестностям обоих оснований, но одно из оснований приклеивается с перекруткой. Уточните, что значит последняя фраза, выпишите последовательность Майера–Виеториса и докажите, что $H_2(K) = 0$. Можно ли вычислить $H_1(K)$, исходя из этой последовательности?

Задача 2. Пусть X — конечный граф, $A \subset X$ — объединение внутренностей ребер, а $B \subset X$ — объединение малых открытых окрестностей вершин (вершина плюс маленькие куски примыкающих к ней ребер, без концов). Выпишите в этой ситуации последовательность Майера–Виеториса и докажите, что сингулярные гомологии графа совпадают с его гомологиями в смысле лекции 1.

Задача 3 (сферы с ручками)**.** а) Пусть $\mathbb{T}^2$ — двумерный тор, $B' \subset B \subset \mathbb{T}^2$ — подмножества, причем B' гомеоморфно замкнутому кругу, а B — открытому; $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}^2 \setminus B'$ (“тор с дыркой”). Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $\mathbb{T}^2 = A \cup B$. б) Сфера с g ручками X_g является объединением тора с дыркой (собственно, “ручки”) и сферы с $(g-1)$ ручками и дыркой, склеенных по границам дырок. Найдите гомологии X_g с произвольными коэффициентами R. в) Сфера с g ручками X_g это $4g$-угольник, противоположные стороны которого склеены друг с другом “без перекрутки” (уточните, что это значит). Докажите, что это определение гомеоморфно определению из пункта 3б. г) Пусть A — внутренность $4g$-угольника из пункта 3в, B — ε-окрестность его границы. Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $X_g = A \cup B$. д) Пусть стороны $4g$-угольника склеены попарно (каким-то образом) без перекрутки. Докажите, что полученное пространство гомеоморфно X_m для некоторого $m \le g$. Как вычислить m, если известно разбиение сторон на пары? е) Вычислите в ситуации пункта 3д последовательность Майера–Виеториса из пункта 3г.

Задача 4. а) Пусть $X = \mathbb{R}P^2$, то есть круг, в котором противоположные точки границы (окружности) попарно склеены. Пусть $A \subset X$ — внутренность круга, $B \subset X$ — кольцо шириной $1/2$ вдоль границы круга. Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $X_g = A \cup B$ с коэффициентами $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и произвольными. б) Та же задача, если X — бутылка Клейна, т.е. квадрат $[0,1]^2$, в котором отождествляются $(x,0) \sim (1-x,1)$, $(0,y) \sim (1,y)$ для всех $0 \le x, y \le 1$, а открытые подмножества это $A = (0,1)^2$ (внутренность квадрата) и $B = \{(x,y) \in X \mid |x-1/2|, |y-1/2| > 1/3\}$ (окрестность границы квадрата).

Задача 5. $K \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая (узел). Представим S^3 как объединение открытых множеств A — тонкой трубки вокруг K (гомеоморфной полноторию без границы) и $B = S^3 \subset K$. Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $S^3 = A \cup B$ в случае, когда а) K — незаузленная окружность; б) K — узел “трилистник”; в) K — произвольный узел; г) K — произвольное зацепление (объединение нескольких непересекающихся узлов).