7. КЛЕТОЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Теоретические задачи

Задача 1. Пусть X, Y — клеточные пространства, $f : X \to Y$ — клеточное отображение. а) Определите гомоморфизм $f_{\#,n} : W_n(X) \to W_n(Y)$ модулей клеточных цепей и докажите, что набор гомоморфизмов $f_{\#,n}$ коммутирует с клеточными дифференциалами, то есть является морфизмом клеточных комплексов. б) Докажите, что соответствующее отображение $f_* : H^W(X) \to H^W(Y)$ клеточных гомологий переходит при изоморфизмах $H^W(X) \cong H(X)$ и $H^W(Y) \cong H(Y)$ в обычный гомоморфизм сингулярных гомологий $f_* : H(X) \to H(Y)$.

Задача 2. а) Пусть X, Y — клеточные пространства с конечным числом клеток. Постройте клеточное разбиение пространства $X \times Y$, в котором клетки — попарные произведения клеток пространств X и Y, и докажите, что для такого разбиения $W(X \times Y, R) = W(X, R) \otimes_R W(Y, R)$. б*) Докажите аналоги этих утверждений в случае, когда пространства X и Y локально конечные. в*) Приведите пример, показывающий, что без локальной конечности в задаче 2б обойтись нельзя.

Задача 3 (формула Кюннета)**.** Пусть $X = \dots \to X_n \xrightarrow{\partial_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^X} \dots \xrightarrow{\partial_1^X} X_0 \to 0$ и $Y = \dots \to Y_n \xrightarrow{\partial_n^Y} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^Y} \dots \xrightarrow{\partial_1^Y} Y_0 \to 0$ — ограниченные справа комплексы свободных модулей над кольцом R, и $X \otimes_R Y \stackrel{\text{def}}{=} Z = \dots \to Z_n \xrightarrow{\partial_n^Z} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^Z} \dots$ — их тензорное произведение; здесь $Z_n = \bigoplus_{k=0}^n X_k \otimes Y_{n-k}$, а $\partial_n^Z = \bigoplus_{k=0}^n \partial_k^X \otimes \partial_{n-k}^Y$. а) Докажите, что если R — поле, то $H(X \otimes Y, R) = H(X, R) \otimes H(Y, R)$ (т.е. $H_n(X \otimes Y, R) = \sum_{k=0}^n H_k(X, R) \otimes H_{n-k}(Y, R)$). б) Докажите, что $H(X \otimes Y, \mathbb{Z}) = H(X, \mathbb{Z}) \otimes H(Y, \mathbb{Z}) \oplus G$ для некоторого $\mathbb{Z}$-модуля (т.е. абелевой группы) G, который зависит только от $H(X, \mathbb{Z})$ и $H(Y, \mathbb{Z})$ (а не от самих комплексов X и Y). Приведите пример, когда модуль G нетривиален.

Примеры вычислений

В следующей задаче нужно построить клеточное разбиение пространства X, вычислить коэффициенты инцидентности клеток и гомологии с коэффициентами в произвольном кольце R или, по крайней мере, к коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если даны два пространства X и Y и отображение $f : X \to Y$, то нужно еще вычислить гомоморфизм $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ при всех k.

Задача 4. а) X — сфера с g ручками ($g \geq 0$ здесь и далее); б) X — бутылка Клейна с g ручками; в) X — проективная плоскость с g ручками; г) X — сфера с g ручками и n дырками; Y — сфера с g ручками, $f : X \to Y$ — вложение. д) $X = S^n$, $Y = \mathbb{R}P^n$, $f : X \to Y$ — стандартное двулистное накрытие. е) $X = S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$, $Y = \mathbb{C}P^n$, $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — обобщенное расслоение Хопфа ($f(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$). ж) $X = S^{2n+1}$ как в пункте 4е; на X действует группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{\zeta^m \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi i m/k} \mid m = 0, \dots, k-1\}$ преобразованиями $\zeta^m(z_0, \dots, z_n) = (\zeta^m z_0, \dots, \zeta^m z_n)$; Y — пространство орбит этого действия, $f : X \to Y$ — отображение, переводящее произвольную точку в ее орбиту. з) $X = S^\infty$ — множество бесконечных последовательностей $(z_0, \dots, z_n, \dots)$, $z_k \in \mathbb{C}$, члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и $\sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 = 1$. $Y = \mathbb{C}P^\infty$ (дайте определение!), $f : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — аналог расслоения Хопфа. и) $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $Y = \mathbb{C}P^2$, $f : X \to Y$ задано формулами $f([x_1 : y_1], [x_2 : y_2]) = [x_1 x_2 : x_1 y_2 + x_2 y_1 : y_1 y_2]$. й) $X = Y = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, $f : X \to Y$ — перестановка сомножителей: $f(a, b) = (b, a)$.