8. МНОГООБРАЗИЯ И ОРИЕНТАЦИЯ

Задача 1 (первый класс Штифеля–Уитни)**.** Говорят, что замкнутая кривая $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, на многообразии M сохраняет ориентацию, если ее поднятие в ориентирующее накрытие $\Gamma : [0,1] \to \widetilde{M}$ замкнуто; кривая меняет ориентацию, если поднятие незамкнуто. Всякая кривая γ определяет отображение $\gamma_* : \mathbb{Z} = H_1(H_1([0,1], \{0,1\}) \to H_1(M, \gamma(0)) = H_1(M)$. Тем самым определен класс гомологий $[\gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_*(\mathbf{1}) \in H_1(M)$, где $\mathbf{1} \in H_1([0,1], \{0,1\}) = \mathbb{Z}$ — образующая (уточните, какая именно!). Докажите, что существует гомоморфизм абелевых групп $w_1 : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ такой, что $\operatorname{Ker} w_1$ содержит классы $[\gamma]$ для всех кривых γ, сохраняющих ориентацию, и не содержит $[\gamma]$ ни для одной кривой, меняющей ориентацию.

Замечание. На самом деле $\operatorname{Ker} w_1$ в точности *состоит* из классов $[\gamma]$ для всех кривых γ, сохраняющих ориентацию. Но чтобы это утверждать, нужно доказать, что для всякого класса $x \in H_1(M, \mathbb{Z})$ существует кривая γ такая, что $x = [\gamma]$. Попробуйте это сделать.

Задача 2. а) Пусть $M = [-1,1] \times (-1,1)/((1,x) \sim (-1,-x) \forall x \in (-1,1))$ — лента Мебиуса без края. Постройте на M атлас, одной из карт которого будет $U = (-1,1) \times (-1,1)$, $V = U$, координатное отображение $z = \mathrm{id}_U$. Докажите, что никакой атлас, эквивалентный построенному, не ориентируем. б) Та же задача про $\mathbb{R}P^2 = [-1,1]^2/((x,1) \sim (-x,-1), (1,y) \sim (-1,-y) \forall x, y \in [-1,1])$, $U = (-1,1) \times (-1,1) = V$, координатное отображение $z = \mathrm{id}_U$. Докажите, что проективная прямая в $\mathbb{R}P^2$ — кривая, меняющая ориентацию. в) Та же задача про $\mathbb{R}P^{2n} = [-1,1]^{2n}/(v \sim -v \forall v \in \partial[-1,1]^{2n})$, $U = V = (-1,1)^{2n}$.

Задача 3. Докажите, что тотальное пространство ориентирующего накрытия произвольного многообразия M — ориентированное многообразие.

Задача 4. Докажите, что всякое одномерное многообразие — конечное или счетное объединение прямых и/или окружностей.

Пусть M_1, M_2 — компактные ориентируемые многообразия одинаковой размерности n, $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение. Точка $a \in M_1$ называется *критической*, если $\det f'_{xy}(a) = 0$, где x, y — какие-то системы координат на M_1 и M_2 в окрестностях точек a и $f(a)$ соответственно. Точка $c \in M_2$ называется *критическим значением*, если прообраз $f^{-1}(c) \subset M_1$ содержит критическую точку; в противном случае c — *регулярное значение* (в том числе если $f^{-1} = \varnothing$).

Задача 5^0 (теорема об обратной функции для многообразий)**.** а) Докажите, что понятие критической точки отображения f не зависит от выбора систем координат на M_1, M_2 в окрестностях точек a и $f(a)$. б) Пусть точка $a \in M_1$ некритическая. Докажите, что существует окрестность U точки a такая, что отображение $f|_U : U \to f(U) \subset M_2$. — диффеоморфизм. в) Докажите, что прообраз регулярного значения отображения f конечен.

Задача 6. а^0) Докажите, что отображение $H_n(M_1) \to H_n(M_1, M_1 \setminus \{a\})$ в точной последовательности пары $(M_1, M_1 \setminus \{a\})$ тождественное. б) Пусть $U \subset M_1$ — окрестность точки a, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Используя лемму о вырезании, докажите, что гомоморфизм $\mathbb{Z} = H_n(M_1) \to H_{n-1}((M_1 \setminus \{a\}) \cap U) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ в последовательности Майера–Виеториса пары $(M_1 \setminus \{a\}, U)$ — тождественный.

Задача 7. Пусть $c \in M_2$ — некритическое значние, $f^{-1} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset M_1$. Пусть также $U \subset M_2$ — окрестность точки c, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$, а $V_i \subset M_1$ — окрестность точки a_i, такая, что $f : V_i \to U$ — диффеоморфизм (для всех $i = 1, \dots, N$). а) Докажите, что гомоморфизм $\mathbb{Z} = H_n(M_1) \to H_{n-1}(V_1 \setminus \{a_1\}) \oplus \dots \oplus H_{n-1}(V_N \setminus \{a_N\}) = \mathbb{Z}^N$ в последовательности Майера–Виеториса пары $(M_1 \setminus f^{-1}(c), V_1 \cup \dots \cup V_N)$ задается матрицей $1 \times N$ вида $(1, \dots, 1)$. Изоморфизмы с $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^N$ здесь согласованы с ориентацией M_1. б) Выведите отсюда, что степень отображения f равна сумме $\operatorname{sgn}(a_1) + \dots + \operatorname{sgn}(a_N)$, где степень и знаки прообразов согласованы с ориентацией M_1 и M_2 (уточните!).

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — гладкая длинная кривая, т.е. гладкое отображение, такое что $f'(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $f(t) \equiv (t, 0)$ при $|t| \geq 1$. Точка $a \in \mathbb{R}^2$ называется точкой самопересечения f, если $|f^{-1}(a)| \geq 2$; простой точкой самопересечения, если $|f^{-1}| = 2$, т.е. $f^{-1}(a) = \{t_1, t_2\}$, где $t_1 < t_2$. Считаем, что знак простой точки самопересечения равен $+1$, если векторы $f'(t_1)$ и $f'(t_2)$ образуют правоориентированный базис, и -1, если левоориентированный. Если векторы параллельны (не образуют базиса, линейно зависимы), то точка пересечения называется нетрансверсальной и ее знак не определен.

Предположим, что все точки самопересечения длинной кривой f простые и трансверсальные, и точки вида $(t, 0)$, $|t| \geq 1$, не являются точками самопересечения. Тогда отображение $f' : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — замкнутая кривая с началом и концом в точке $b \stackrel{\text{def}}{=} f'(1) = (1,0)$; ее класс гомотопии в $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, b) = \mathbb{Z}$ называется индексом кривой f и обозначается $\mathrm{ind}(f)$.

Задача 8^0 (формула Уитни для длинных кривых)**.** а) Докажите, что кривая f имеет конечное число точек самопересечения. б) Докажите формулу Уитни: сумма знаков точек самопересечения кривой f равна индексу кривой.

Указание (к обоим пунктам)**.** Рассмотрите отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $F(t,s) = f(t) - f(s)$.

Гладкой замкнутой плоской кривой с начальной точкой a называется гладкое отображение $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ такое, что $f(0) = f(1) = a$, $f'(0) = f'(1)$ и $f'(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$. Индекс кривой $\mathrm{ind}(f) \in \mathbb{Z}$ определяется так же, как для длинной кривой выше. Помимо этого, для каждой точки $b \notin f([0,1])$ определим ее индекс $\mathrm{ind}_f(b)$ относительно кривой как класс гомотопии замкнутой кривой $f_b(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, заданной равенством $f_b(t) = f(t) - b$, в группе $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, a-b) = \mathbb{Z}$. Индекс точки b постоянен, пока точка движется, не проходя через кривую, и меняется на 1, если точка в своем движении трансверсально пересекает гладкий участок кривой (т.е. проходит через точку кривой, не являющуюся точкой самопересечения).

Пусть f — гладкая кривая, все точки самопересечения которой простые и трансверсальные; их знаки определяются так же, как для длинных кривых. Предположим также, что a точкой самопересечения не является; обозначим a_+ и a_- точки плоскости, близкие к a и лежащие по обе стороны от кривой.

Задача 8 (продолжение: формула Уитни для замкнутых кривых)**.** в) Докажите, что $\mathrm{ind}(f)$ равен сумме знаков точек самопересечения плюс число $\mathrm{ind}_f(a_-) + \mathrm{ind}_f(a_+)$.