Экзамен

5 декабря

Задача 1

Пусть G — конечная группа порядка 289. Покажите, что ее центр нетривиален.

Задача 2

Пусть p и q — два различных простых числа, а G — конечная группа порядка pq^2. Докажите, что в G найдется нетривиальная нормальная подгруппа.

Задача 3

Докажите, что $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — кольцо главных идеалов.

Задача 4

Пусть V и W — конечномерные векторные пространства над полем $\mathbf{k}$, а $f : V \to W$ и $g : W \to V$ — линейные преобразования. Докажите, что оператор $\mathrm{Id}_V + g \circ f$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathrm{Id}_W + f \circ g$.

Задача 5

Докажите, что многочлен $x^4 + 3x + 3$ неприводим над полем $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Задача 6

Пусть $F = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$. Докажите, что E/F — расширение Галуа, найдите $\mathrm{Gal}(E/F)$ и опишите все промежуточные расширения $F \subset K \subset E$.