Задание #3

20 сентября

Задача 1

Рассмотрим действие конечно группы G на конечном множестве X. Обозначим за X/G множество орбит, а за X^g — множество элементов $x \in X$, таких что $g \cdot x = x$. Докажите, что

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Задача 2

Пусть $H < G$ — подгруппа, такая что $(G : H) = 2$. Докажите, что $H \triangleleft G$.

Задача 3

Для подмножеств $S, H \subseteq G$ группы G обозначим за SH множество

$$SH = \{sh \mid s \in S, h \in H\}.$$

Приведите пример группы G и подгрупп $S, H < G$, таких что SH не является подгруппой. Докажите, что если хотя бы одна из подгрупп нормальна, то SH — подгруппа. Докажите, что если обе подгруппы нормальны, то SH — нормальная подгруппа.

Задача 4

Докажите, что в группе порядка 105 найдется подгруппа порядка 35.

Задача 5

Докажите, что любая группа порядка 15 — циклическая.

Задача 6

Пусть G — группа. Назовем группой внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(G)$ образ отображения G в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ (где G действует на себе сопряжениями). Докажите, что $\mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$.