Задание #4

27 сентября

Задача 1

Пусть A — область целостности, такая что существует функция $N : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{>0}$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $a, b \in A$, таких что $f(a) \geq f(b)$, либо $b|a$, либо $a = bq + r$ для некоторых $q, r \in A$, где $f(r) < f(b)$. Докажите, что A — кольцо главных идеалов.

Задача 2

Докажите, что множество комплексных чисел $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ образует кольцо главных идеалов. (Подсказка: комплексное число можно домножить на сопряженное.) Докажите, что множество комплексных чисел $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ образует кольцо, не являющееся кольцом главных идеалов.

Определение. Пусть A — кольцо. Элемент $p \in A$ называется *неприводимым,* если из условия $p = ab$ следует, что либо a, либо b обратим. Элемент $p \in A$ называется *простым,* если из условия $p|ab$ следует, что либо $p|a$, либо $p|b$.

Задача 3

Пусть A — кольцо главных идеалов. Докажите, что множества простых и неприводимых элементов в A совпадают.

Задача 4

Пусть A — кольцо главных идеалов. Докажите, любой элемент $a \in A$ можно записать в виде произведения неприводимых $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, причем с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимые элементы такое разложение единственно.

Задача 5

Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен степени 2, не имеющий вещественных корней. Докажите, что $\mathbb{R}[x]/(P) \simeq \mathbb{C}$.

Задача 6

Пусть $A = \mathbb{Z}/(2)$. Докажите, что $A[x]/(x^2 + x + 1)$ — поле.