Задание #5

11 октября

Определение. Идеалы I, J в кольце A называются взаимно простыми, если $I+J=A$.

Задача 1

Пусть $I_1, I_2, \ldots I_n \subseteq A$ — набор попарно взаимно простых идеалов в кольце A. Докажите, что $I_1 I_2 \cdots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$, а естественное отображение колец

$$A/(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n) \to A/I_1 \times A/I_2 \times \cdots \times A/I_n$$

— изоморфизм.

Задача 2

Пусть A — кольцо главных идеалов, p — простой элемент в A, $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $1 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_m$ — целые числа. Докажите, что

$$A/(p^{a_1}) \oplus A/(p^{a_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{a_n}) \simeq A/(p^{b_1}) \oplus A/(p^{b_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{b_m})$$

тогда и только тогда, когда $n = m$ и $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. (Для любого A-модуля M канонически определен подмодуль pM.)

Задача 3

Пусть A — кольцо главных идеалов, $a_1 | a_2 | \cdots | a_n$, $b_1 | b_2 | \cdots | b_m$ — элементы A. Докажите, что

$$A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_n) \simeq A/(b_1) \oplus A/(b_2) \oplus \cdots \oplus A/(b_m)$$

тогда и только тогда, когда $n = m$ и $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Задача 4

Вычислите определитель матриц

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5

Пусть $\mathbf{k}$ — поле, $X \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbf{k})$ — такая, что $\mathrm{tr}(XY) = 0$ для всех $Y \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbf{k})$. Покажите, что $X = 0$.

Задача 6

Вычислите $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m))$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/(n))$ для всех целых $n, m \geq 1$.