# Задание #6

18 октября

**Определение.** Пусть $V$ — векторное пространство над полем $\mathbf{k}$, а $\phi \in \mathrm{End}(V)$ — линейный оператор. Элемент $\lambda \in \mathbf{k}$ называется *собственным значением* $\phi$, если существует вектор $v \in V$ (называемый *собственным вектором с собственным значением* $\lambda$), такой что $\phi(v) = \lambda v$.

### Задача 1

Докажите, что любой набор собственных векторов линейного оператора с попарно различными собственными значениями линейно независим.

### Задача 2

Рассмотрим следующие утверждения: а) у линейного оператора $\phi$ имеется два линейно независимых собственных вектора с собственным значением $\lambda$, б) $\lambda$ — кратный корень характеристического многочлена $\phi$. Верно ли, что из а) следует б)? Верно ли, что из б) следует а)?

### Задача 3

Найдите все сопряженные среди матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

### Задача 4

Докажите, что всякая вещественная матрица размера $2 \times 2$ с положительными элементами сопряжением приводится к диагональному виду.

### Задача 5

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{k})$. Вычислите след и определитель линейного оператора, заданного на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{k})$ умножением на $A$ справа.

### Задача 6

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{k})$ — такая, что $A^T = A^2$. Найдите все допустимые собственные значения $A$.