Задание #7

1 ноября

Задача 1

Докажите, что многочлен $x^4 - 10x^2 + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$, но приводим в $\mathbb{F}_p[x]$ для любого простого p.

Задача 2

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен степени большей 1. Покажите, что найдется простое p, такое что f приводим в $\mathbb{F}_p[x]$.

Задача 3

Пусть G — конечная абелева группа порядка n, такая что для любого делителя $m|n$ количество элементов в G, порядок которых делит m, не привосходит m. Докажите, что G — циклическая. Пусть $\mathbf{k}$ — конечное поле. Докажите, что группа мультипликативная группа обратимых элементов $\mathbf{k}^\times$ — циклическая.

Задача 4

Пусть $f(x)$ — многочлен степени m неприводимый над F, E/F — расширение степени n. Докажите, что если $(n, m) = 1$, то f неприводим над E.

Задача 5

Докажите, что если F — поле характеристики p, и $x^p - x - a$ приводим в $F[x]$, то он распадается в произведение линейных. Докажите, что многочлен $x^p - x - 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$ для всех простых p.

Задача 6

Докажите, что с помощью циркуля, линейки и устройства для деления угла на 3 равные части можно построить правильный 7-угольник.