

Листок 1.

Задача 1. Рассмотрим множество многочленов вида

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

и отождествим его с пространством \mathbb{R}^n векторов (a_{n-1}, \dots, a_0) . Найдите матрицу Якоби отображения $(P, Q) \rightarrow PQ$ пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n} . Докажите, что определитель матрицы Якоби равен нулю тогда и только тогда, когда многочлены P и Q имеют общий корень.

Задача 2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение, причем матрица Якоби $f'(a)$ невырождена в каждой точке a .

(а) Докажите, что для всякого открытого множества U его образ $f(U)$ является открытым множеством.

(б) Докажите, что при $n = 1$ отображение f инъективно.

(с) Проверьте, что матрица Якоби отображения $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ невырождена, но это отображение не является инъекцией.

Задача 3. Приведите пример такой всюду дифференцируемой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, но не существует окрестностей $U(0)$ и $V(0)$, для которых $f: U(0) \rightarrow V(0)$ – диффеоморфизм.

Задача 4. Существует ли такой диффеоморфизм некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2$ точки $(0, 0)$ на некоторую окрестность $V \subset \mathbb{R}^2$ точки $(0, 0)$, что образ части графика (а) $y = x^3 \sin \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$, (б) $y = |x|$ из этой окрестности является интервалом $\{(x, 0): \alpha < x < \beta\}$ на оси ОХ?

Задача 5. Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ – кривая на плоскости, заданная непрерывно дифференцируемыми функциями $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [0, 1]$. Прямая l , пересекающая кривую γ называется трансверсалью, если во всех точках пересечения вектор скорости $\dot{\gamma}$ отличен от нуля и не параллелен l . Докажите, что множество точек пересечения кривой γ с прямой l конечно.

Задача 6. Рассмотрим уравнение $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0$. Пусть U – множество в \mathbb{R}^n таких векторов (c_{n-1}, \dots, c_0) , что уравнение имеет n различных вещественных корней. Из теоремы Виета известно, что $c_k = c_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – корни уравнения. Докажите, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность, в которой $x_i = x_i(c_0, \dots, c_n)$, причем корни x_i гладко зависят от коэффициентов c_i . Докажите, что U является открытым множеством в \mathbb{R}^n .

Задача 7. Докажите, что открытый круг, открытый квадрат, вся плоскость и открытый треугольник попарно диффеоморфны.

Задача 8. Придайте смысл равенству

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

и обоснуйте его.

Задача 9. Выпишите уравнение $F(x, y, z) = 0$, задающее тор:

$$x(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \cos \varphi, y(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \sin \varphi, z(\varphi, \psi) = r \sin \psi, 0 < r < R.$$

Напишите уравнение касательной плоскости к тору.

Задача 10. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение, причем $f \circ f = f$. Докажите, что $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в \mathbb{R}^n . Какой характеристикой f определяется размерность этой поверхности?