

Листок 4.

Задача 1. Постройте на сфере S^{2n+1} всюду отличное от нуля векторное поле.

Задача 2. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2 \sin x)\partial_x, \quad (\sin^2 x)\partial_x, \quad (\sin 2x)\partial_x?$$

Задача 3. Пусть $U = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ и $F(x, y) = (xy, y/x)$. Проверьте, что отображение F — диффеоморфизм $U \rightarrow U$ и найдите F_*V и F_*W , где

$$V = x\partial_x + y\partial_y, \quad W = y\partial_x.$$

Задача 4. Найдите все диффеоморфизмы $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющие векторное поле

$$\sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}.$$

Задача 5. Выпрямите в окрестности нуля векторное поле

- (а) $x\partial_x + (1+y)\partial_y$,
 (б) $(x-y)\partial_x + (x+y+1)\partial_y$.

Задача 6. Для векторных полей V и W на \mathbb{R}^3 вычислите скобку Ли $[V, W]$:

- (а) $V = x\partial_x - y\partial_y, W = y\partial_x - z\partial_y$,
 (б) $V = x\partial_y - y\partial_x, W = x\partial_y + y\partial_x$.

Задача 7. Найдите все векторные поля на \mathbb{R}^n , коммутирующие с векторным полем

- (а) ∂_{x_1} , (б) $\partial_{x_1} + \dots + \partial_{x_n}$.

Задача 8. Удалим из единичной сферы S^2 , заданной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, полюса $(0, 0, \pm 1)$. Пусть X — векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к меридианам в направлении с севера на юг, а Y — векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к параллелям в направлении с запада на восток. Запишите X и Y в локальных координатах (широта, долгота) и найдите коммутатор $[X, Y]$.

Задача 9. Докажите, что линейная оболочка векторных полей

$$X = y\partial_z - z\partial_y, \quad Y = z\partial_x - x\partial_z, \quad Z = x\partial_y - y\partial_x,$$

является алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли \mathbb{R}^3 с векторным произведением.

Задача 10. Опишите векторные поля на \mathbb{R}^n , фазовые потоки которых сохраняют
 (а) расстояние, (б) объем. Докажите, что такие векторные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора.