Лекция 5. 05.10.2021.

Простые числа.

Здесь мы обсудим связь между распределением нулей дзета-функции Римана и распределением простых чисел.

Основные функции, с которыми мы будем работать:

$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$ – считающая функция простых чисел

$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \ln p$

$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$

функции Чебышёва

Здесь $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{при } n = p^k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ – функция Мангольдта.

Асимптотический закон распределения простых
гласит, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to +\infty$. Известен
как гипотеза с конца XVIII века, доказан в 1896 г.

Лежандр предположил, что более хорошим приближением
для $\pi(x)$ является $\frac{x}{\ln x - B}$ для некоторого B.
Его вычисления указывали на равенство $B \approx 1.086$
Впоследствии оказалось, однако, что $B = 1$.

Гаусс: $\pi(x) \approx \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} = li(x)$

Асимптотическое разложение $li(x)$

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \ldots + \frac{N!\, x}{(\ln x)^{N+1}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{N+2}}\right)$$

расходящееся асимпт. разложение.

Если $\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$, то $B = 1$.

В самом деле,
$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right), \text{ а } \frac{x}{\ln x - B} = \frac{x}{\ln x} + \frac{Bx}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

Легко увидеть, что
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s),$$ поэтому с аналитической
точки зрения

удобнее всего работать с $\psi(x)$. Как мы знаем, существенный вклад в асимптотику суммы $\sum_{n\le x} a_n$ вносят особенности $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$.

Особенности $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ являются простыми полюсами. Они расположены в нулях и полюсах $\zeta(s)$ и вычеты соответствуют кратностям: если

$\zeta(s) \sim C_\rho (s-\rho)^m$ при $s \to \rho$, то

$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \sim -\frac{m}{s-\rho}$ при $s \to \rho$.

Данный факт приводит и так называемой явной формуле для $\psi(x)$:

<u>Теорема 2</u> Для $2 \le T \le x$, $x \in \mathbb{Z} + 1/2$

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<|\operatorname{Im}\rho|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$$

Сначала установим связь между $\psi(x)$ и $\pi(x)$, а также найдем их порядки:

<u>Теорема 1</u> $\psi(x) \asymp \vartheta(x) \asymp x$, $\pi(x) \asymp \frac{x}{\ln x}$ и если

$\psi(x) = x + o(x)$, то $\pi(x) = \operatorname{li}(x) + o(\operatorname{li}(x))$ при $x \to +\infty$.

(Теоремы ~~формулировать~~ в порядке появления на лекции).

Формула $\sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ эквивалентна тому, что $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$. Данное соотношение можно доказать так: если $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\ln n = \alpha_1 \ln p_1 + \ldots + \alpha_k \ln p_k = \underbrace{\ln p_1 + \ldots + \ln p_1}_{\alpha_1} + \ldots + \underbrace{\ln p_k + \ldots + \ln p_k}_{\alpha_k} =$$

$$= \Lambda(p_1) + \Lambda(p_1^2) + \ldots + \Lambda(p_1^{\alpha_1}) + \ldots + \Lambda(p_k) + \ldots + \Lambda(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Просуммируем это соотношение по $n \le x$.

Из формулы Стирлинга:

$$\sum_{n \le x} \ln n := f(x) \quad , \text{но} \quad f(x) = \sum_{n \le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) =$$

$$\overset{\text{И}}{=} x \ln x - x + O(\ln x). \qquad = \sum_{d \le x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right].$$

В частности, так как $[2u] \ge 2[u]$, получаем

$$2x \ln 2 + O(\ln x) = f(2x) - 2f(x) = \sum_{d \le 2x} \Lambda(d) \left(\left[\frac{2x}{d}\right] - 2\left[\frac{x}{d}\right] \right) \le$$

Scanned by TapScanner

$$\ge \sum_{x<d\le 2x} \Lambda(d) = \psi(2x) - \psi(x) \Rightarrow$$

$$\psi(2x) - \psi(x) + \psi(x) - \psi(x/2) + \ldots \le 2x\ln 2 + x\ln 2 + \frac{x}{2}\ln 2 + \ldots + O(\ln^2 x)$$

$$\le 4x\ln 2 + O(\ln^2 x) \Rightarrow \psi(x) \le 2x\ln 2 + O(\ln^2 x).$$

Что касается нижних оценок, из той же формулы для $f(x)$ получаем

$$x\ln x - x + O(\ln x) = f(x) = \sum_{d\le x} \Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right] = x\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d} +$$

$+O(x) \Rightarrow \displaystyle\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d} = \ln x + O(1)$. В частности, для нек-рого $c>0$ имеем $\displaystyle\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d} \le \ln x + c$ и $\displaystyle\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d} \ge \ln x - c$. Выбрав $A = e^{3c}$, получаем

$$\sum_{x<d\le Ax}\frac{\Lambda(d)}{d} \ge \ln Ax - c - (\ln x + c) = c \Rightarrow$$

$$\psi(Ax) - \psi(x) \ge cx \Rightarrow \cancel{\psi(Ax) - \psi(x) + \psi(x) - \psi\left(\tfrac{x}{A}\right) + \ldots}$$

$$\psi(Ax) \ge cx.$$

Здесь у нас получилась не совсем явная константа. Это можно исправить такими соображениями:

$[1,\dots,N] = e^{\psi(N)}$, поскольку

$$[1,\dots,N] = \prod_{p\le N} p^{\left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]} = \prod_{p^k\le N} p = \prod_{n\le N} e^{\Lambda(n)} = e^{\psi(N)}.$$

Рассмотрим

$I(N) = \int\limits_0^1 x^N(1-x)^N\,dx$. Т.к. $x(1-x)\le 1/4$, то

$I(N)\le 4^{-N}$. С другой стороны, $\exists$ целые $b_0,\dots,b_{2N}$:

$x^N(1-x)^N = \sum b_i x^i \Rightarrow$

$$I(N) = \sum_{i=0}^{2N} \frac{b_i}{i+1} \Rightarrow I(N)\,e^{\psi(2N+1)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$e^{\psi(2N+1)} \ge 4^N \Rightarrow \psi(2N+1) \ge 2N\ln 2.$$

Далее, $\vartheta(x) = \sum\limits_{p\le x}\ln p = \psi(x) - \sum\limits_{p^2\le x}\ln p - \sum\limits_{p^3\le x}\ln p - \dots =$

$= \psi(x) + O(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \dots) = \psi(x) + O(\sqrt{x})$.

Тем самым, $\vartheta(x) \asymp \psi(x) \asymp x$.

Если $\psi(x) = x + O(R(x))$, где $R(x) >> \sqrt{x}$ и $R(x)$ возрастает, то $\vartheta(x) = x + O(R(x) + \sqrt{x}) = x + O(R(x))$.

Следовательно,

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{\ln p} = O(\sqrt[3]{x}) + \int_{\sqrt[3]{x}}^{x} \frac{d\vartheta(t)}{\ln t} =$$

$$= O(\sqrt[3]{x}) + \int_{\sqrt[3]{x}}^{x} \frac{dt}{\ln t} + O\left(\frac{R(x)}{\ln x} + \frac{R(\sqrt[3]{x})}{\ln x}\right) + O\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^{x} \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt\right)$$

$$= li(x) + O\left(\sqrt[3]{x} + \frac{R(x)}{\ln x}\right) = li(x) + O\left(\frac{R(x)}{\ln x}\right).$$

В частности, если $R(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $\frac{R(x)}{\ln x} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$, что и требовалось.

Для того, чтобы доказать Теорему 2, покажем, что приближения для $\sum_{n \le x} a_n$ можно получить при помощи интегралов от $\sum \frac{a_n}{n^s}$.

Теорема 3 (Формула Перрона)

Пусть a_n — последовательность комплексных чисел.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}\text{, ряд}$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| n^{-\sigma}$ сходится для всех $\sigma > 1$, причём

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| n^{-\sigma} \ll \frac{1}{(\sigma-1)^{\alpha}}$ для нек-рого $\alpha > 0$.

Пусть $A(n) \geq |a_n|$, где $A(n)$ — некоторая неубывающая функция. $(b = O(1))$

Тогда $\forall b > 1$ выполнено равенство $(x \in \mathbb{Z} + 1/2)$

$$\Phi(x) := \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}} + \frac{x A(2x) \ln x}{T}\right).$$

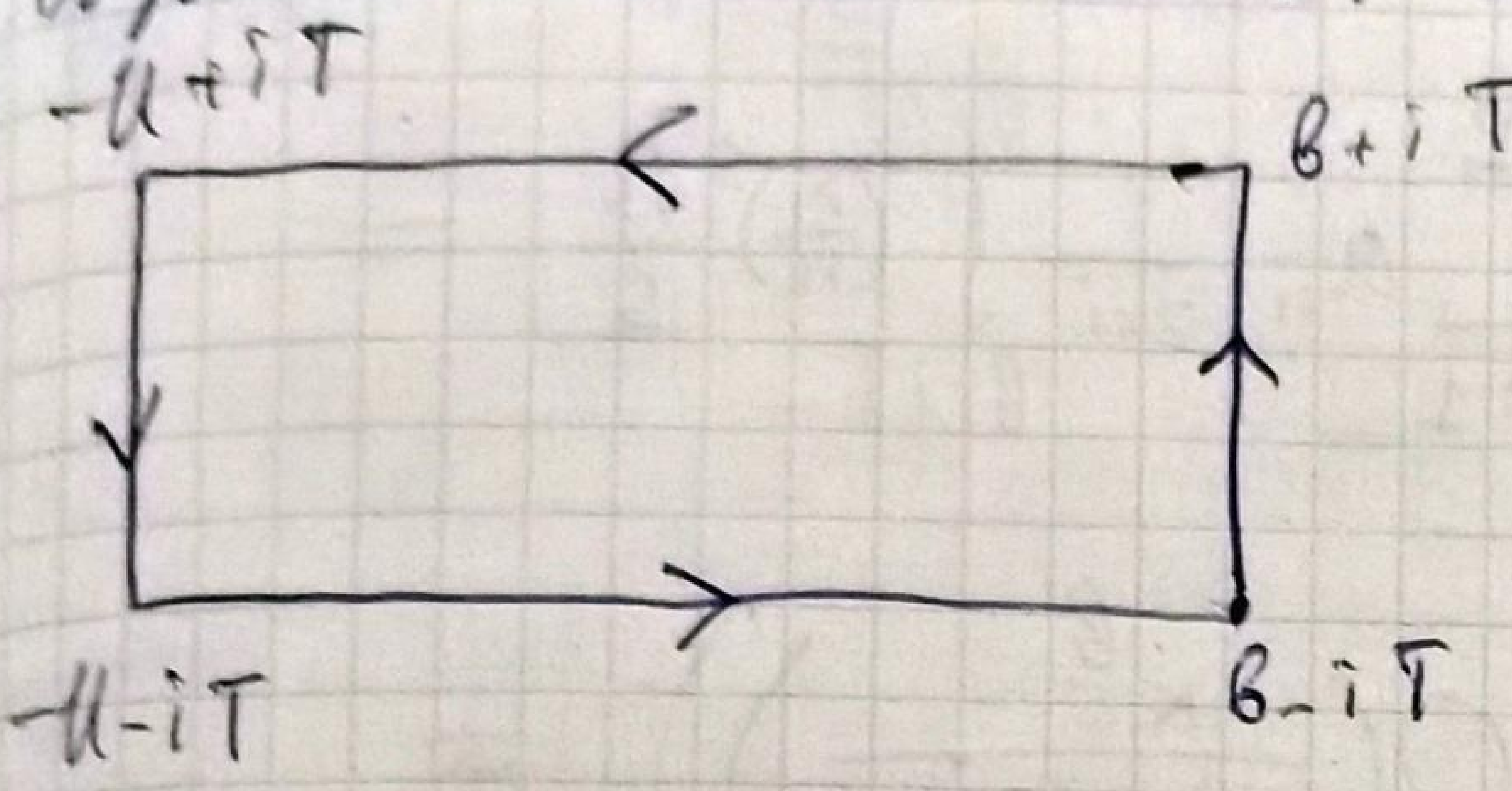
Для док-ва Теоремы 3 будем пользоваться такой леммой:

<u>Лемма 1</u> При $a > 0$, $T > 0$, $b > 0$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}\, ds = \delta_{a>1} + O\left(\frac{a^b}{T|\ln a|}\right).$$

<u>Д-во</u>: проведём док-во для $a > 1$. Для $a < 1$ всё будет аналогично, но контур будем двигать в другую сторону.

Возьмём большое $u>0$. Замкнём контур:



По теореме Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}\,ds = \operatorname*{Res}_{s=0}\frac{a^s}{s} - \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b+iT}^{-u+iT}+\int_{-u+iT}^{-u-iT}+\int_{-u-iT}^{b-iT}\right)\frac{a^s}{s}\,ds.$$

Первое слагаемое равно 1. Первое и третье слагаемые имеют одинаковый модуль (сопряженность). Оценим первое:

$$\left|\int_{b+iT}^{-u+iT}\frac{a^s}{s}\,ds\right| \le \int_{-u}^{b}\frac{a^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma \le \frac{1}{T}\int_{-u}^{b}a^\sigma\,d\sigma \le \frac{a^b-a^{-u}}{T\ln a}.$$

Со вторым слагаемым поступим так же:

$$\left|\int_{-u+iT}^{-u-iT}\frac{a^s}{s}\,ds\right| \le 2Ta^{-u}.$$

При $u\to+\infty$ это выражение стремится к 0, так что получаем требуемое.

Д-во Т3: В силу сходимости ряда для $f(s)$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cdot\left(\delta_{x>n} + O\left(\frac{x^b}{n^b T\left|\ln\frac{x}{n}\right|}\right)\right) =$$

$$= \Phi(x) + O\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n| x^b}{n^b T\left|\ln\frac{x}{n}\right|}\right).$$

Разобьем последнее слагаемое на R_1, R_2 и R_3:

$$R_1 = \sum_{n\le x/2}, \quad R_2 = \sum_{x/2<n<2x}, \quad R_3 = \sum_{n\ge 2x}.$$

Первое и третье слагаемые оцениваются похожим образом: если $n \le x/2$ или $n \ge 2x$, то $\left|\ln\frac{x}{n}\right| \ge \ln 2$, так что

$$R_1, R_3 \ll \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n| x^b}{T n^b} \ll \frac{x^b}{T(b-1)^\alpha} \quad \text{(см. условие)}$$

R_2 оцениваем при помощи нер-ва $\left|\ln\frac{x}{n}\right| =$
$= \left|\ln\left(1+\frac{n-x}{x}\right)\right| \gg \frac{|n-x|}{x}$:

$$R_2 \ll \sum_{x/2 < n < 2x} \frac{|a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\frac{|n-x|}{x}} \ll 2^b x A(2x) \sum_{x/2<n<2x} \frac{1}{T|n-x|} \ll$$

$$\ll \frac{x A(2x)\ln x}{T},$$ что и завершает доказательство.

Таким образом, чтобы получить формулы для $\psi(x)$, нам нужно изучать интегралы от $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$.

Пусть $\xi_1(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Мы знаем, что $\xi_1(s)$ — целая функция на $\mathbb{C}$ и $\xi_1(1-s)=\xi_1(s)$.

Кроме того, $|\xi_1(s)| \le \exp\left(A(|s|+1)\ln(|s|+2)\right)$ для некоторого $A>0$. В самом деле, достаточно установить это для $\sigma \ge 1/2$. При $\sigma \ge 1/2$ имеем $|\zeta(s)| \ll |s|$, т.к.

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx, \quad |s||s-1| \ll |s|^2,$$

$$\pi^{-s/2} \ll 1 \quad \text{и} \quad |\Gamma(s/2)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s/2-1}\,dx\right| \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\sigma/2-1}\,dx = \Gamma(\sigma/2) \le \left(\left[\frac{\sigma}{2}\right]+1\right)! \ll \sigma^\sigma,$$ что

и даёт нужную оценку.

Scanned by TapScanner

Таким образом, $\xi_1(s)$ – функция 1-ого порядка.
Нетривиальные нули $\zeta(s)$ соответствуют нулям $\xi_1(s)$.
Разложение Вейерштрасса даёт в таком случае

$$\xi_1(s) = e^{As+B} \prod_{\rho} \left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \text{ причем } \sum \frac{1}{|\rho|^2} < \infty$$

$A, B \in \mathbb{C}$. Из бесконечного ~~ряда~~ произведения для $\Gamma(s)$ получается соотношение

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + c$$

для некоторой константы c.

<u>Лемма 2</u> $\exists c_1 : \forall T \geq 0$

$$\sum_{\rho=\beta+i\gamma} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq c_1 \ln(T+2).$$

<u>Д-во</u>: Положим $s = 2+iT$. Тогда

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\right| \leq \sum_{n}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \ll 1. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(1)$. По формуле выше, получим

$$-\mathrm{Re}\,\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right) \ll 1$$

Первое слагаемое есть $O(1)$. Оценим третье:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \le \sum_{n\le T}\frac{1}{n} + \sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2} \ll \ln(T+2)$$

Второе слагаемое равно

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}+\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} + O(1).$$

Далее, $1\le 2-\beta_n \le 2 \Rightarrow \dfrac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} \ge \dfrac{1}{4+(T-\gamma_n)^2} \ge$

$\ge \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}$, откуда и получаем требуемую оценку.

<u>Следствие 1</u> $\#\{|T-\gamma_n|\le 1\} \ll \ln T$. ~~Вс~~

В самом деле, каждое γ_n с $|T-\gamma_n|\le 1$ даёт вклад хотя бы $1/2$ в сумму из леммы 2.

В частности $\#\{0<|\gamma_n|\le T\} \ll T\ln T$.

Следствие 2

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{(T-\gamma_n)^2} \ll \ln T.$$

Каждое γ_n с $|T-\gamma_n|>1$ даёт вклад $> \frac{1}{2(T-\gamma_n)^2}$ в сумму в лемме 2.

Следствие 3

при $-1 \le \sigma \le 2$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln(|t|+2))$$

Д-во: Если $s=\sigma+it$, рассмотрим

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(1).$$

Из разложения для $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, получаем

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{1+it} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2+2n+it}\right) = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) +$$

$$+ O(\ln(|t|+2)).$$

Далее, если $|t-\gamma_n| \le 1$, то $\frac{1}{2+it-\rho_n} \ll 1$, $\Rightarrow$ таких слагаемых $O(\ln(|t|+2))$

$$\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)=\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\ln(|t|+2)).$$

С другой стороны,

$$\sum_{|t-\gamma_n|\ge 1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)=\sum_{|t-\gamma_n|\ge 1}\frac{2-\sigma}{((\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n))((2-\beta_n)+i(t-\gamma_n))}\ll$$

$$\ll\sum_{|t-\gamma_n|\ge 1}\frac{1}{|t-\gamma_n|^2}\ll \ln(|t|+2),$$ откуда и получим нужную формулу.

<u>Лемма 3</u> $\forall\, T\ge 2$ существует $T\le T_1\le T+1$:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)\ll \ln^2 T \qquad \forall\; -1\le\sigma\le 2.$$

В самом деле, число $\gamma_n\in[T-1,T+2]$ есть $O(\ln T)$

$\Rightarrow$ существует $T_1\in[T,T+1]$ такое, что расстояние от T_1 до ближайшего γ_n не меньше среднего, т.е. $|T_1-\gamma_n|\gg\frac{1}{\ln T}$, откуда из следствия 3

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ll \ln T+\ln T\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}1\ll \ln^2 T. \quad \square.$$

Теперь мы готовы доказать Теорему 2.

Замечание 1: выберем T_1 из Леммы 3. Формулу достаточно доказать для $T=T_1$.

В самом деле,

$$\sum_{T\le|\operatorname{Im}\rho|\le T_1} \frac{x^{\rho}}{\rho} \ll \frac{x}{T}\sum_{T<|\operatorname{Im}\rho|\le T_1} 1 \ll \frac{x\ln T}{T} \ll \frac{x\ln x}{T},$$

что мажорируется остатком.

Итак, пусть $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT_1) \ll \ln^2 T \quad \forall\, -1\le\sigma\le 2.$

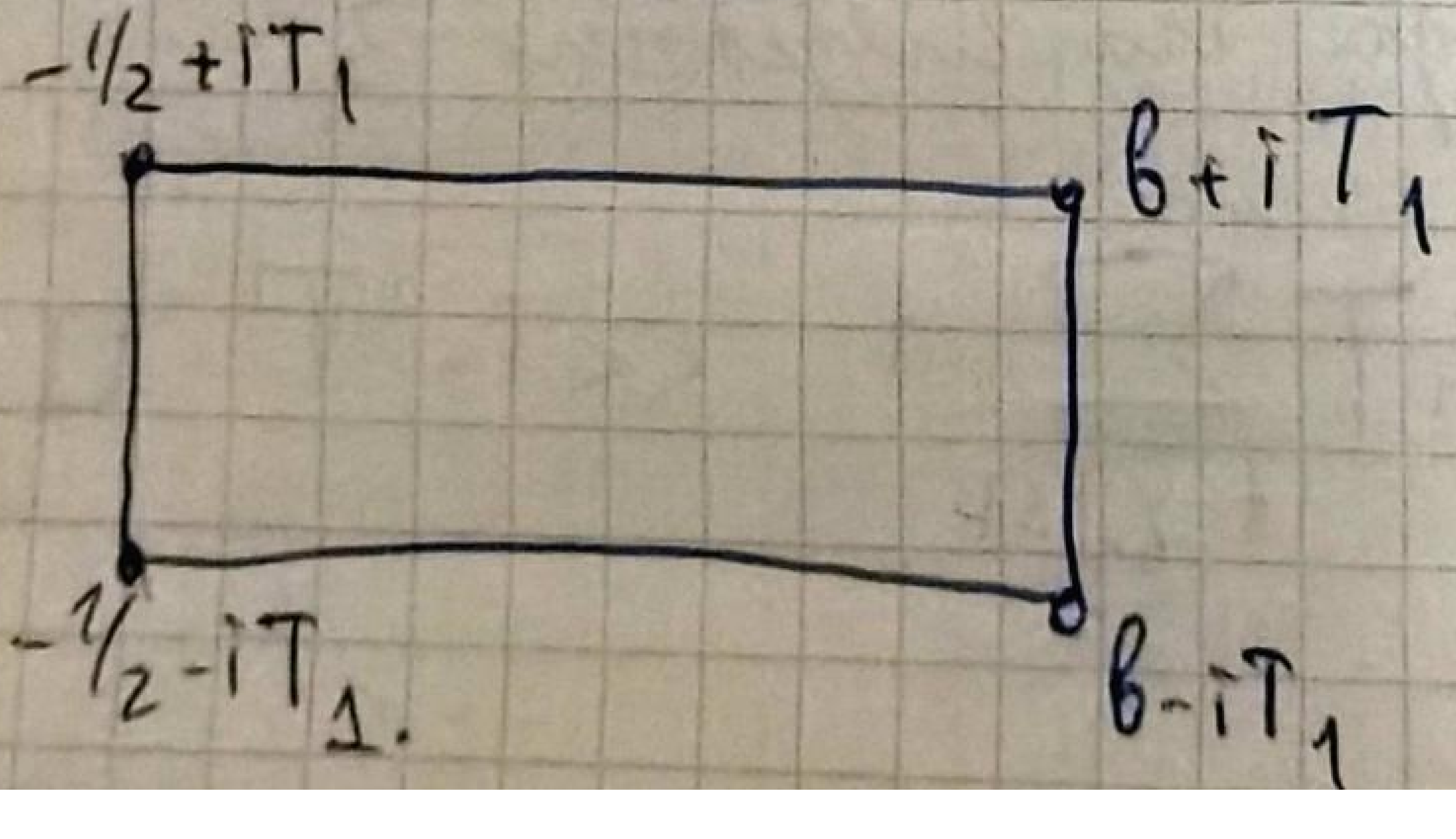
По Теореме 3, для $b=1+\frac{1}{\ln x}$ получаем

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)} + \frac{xA(2x)\ln x}{T}\right)$$

Так как $|\Lambda(n)|\le \ln n$ и $x^b \ll x$, получаем

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right).$$

Замкнём наш контур:



Полюса $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ внутри контура дают вклад

$$x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \le T_1} \frac{x^\rho}{\rho}$$

Оценим интегралы по верхнему и нижнему (они сопряжены) и боковому интервалам.

$$\left| \int_{b+iT_1}^{-1/2+iT_1} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,ds \right| \ll \frac{\ln^2 T_1}{T_1} \int_{-1/2}^{b} x^\sigma\, d\sigma \ll \frac{x^b \ln^2 T_1}{T_1 \ln x} \ll \frac{x \ln x}{T_1}$$

То же для нижнего куска.

Боковой кусок:

$$\left| \int_{-1/2-iT_1}^{-1/2+iT_1} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,ds \right| \ll \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}, \text{ т.к.}$$

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta}\left(-\frac{1}{2}+it\right) \right| \ll \ln(|t|+2) + \#\{|t-\gamma_n| \le 1\} \ll \ln(|t|+2).$$

Это и завершает доказательство.