Лекция 6. 12.10.2021

Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.

В прошлый раз мы показали, что для полуцелого x выполняется равенство

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \le T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) \qquad (2 \le T \le x)$$

Легко видеть, что вклад от одного нуля ρ тем больше, чем больше его вещественная часть, поскольку $|x^{\rho}| = x^{\beta}$

Докажем границу нулей для $\zeta(s)$ и используем её для доказательства асимптотического закона распределения простых чисел.

<u>Теорема 1</u> (Адамар, де ла Валле-Пуссен, 1896)
Существует константа $c > 0$ такая, что из $\zeta(\beta + i\gamma) = 0$ следует неравенство

$$1 - \beta \ge \frac{c}{\ln(|\gamma| + 2)}$$

Scanned by TapScanner

Доказательство: Напомним, что мы доказали приближенное равенство для $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$:

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln(|\gamma|+2)).$$

Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $\zeta(s)$. Положим

$s = 1+\varepsilon+i\gamma$. Так как нули отделены от полюсов, мы можем считать, что $\frac{1}{s-1} = O(1)$ и $\frac{1}{1+\varepsilon+i\gamma-1} = O(1)$

(Можно также указать явную оценку вида $|\gamma| \geq c \geq 0$, см. листок)

Заметим, что выполнено неравенство

$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geq 0$

Оно выполнено, потому что $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \Rightarrow$

$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2 + 4\cos\varphi + 2\cos^2\varphi = 2(\cos\varphi + 1)^2 \geq 0.$

Наиболее важным для нас соотношением здесь будет тот факт, что коэффициент перед $\cos\varphi$ больше свободного члена в нашем неравенстве.

Рассмотрим теперь сумму

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon)-4\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+i\gamma)-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+2i\gamma)$$

Так как при $\operatorname{Re} s>1$ выполнено

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\cos(t\ln n)}{n^{\sigma}},$$ получаем

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon)-4\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+i\gamma)-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+2i\gamma)=$$

$$=\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)(3+4\cos(\gamma\ln n)+\cos(2\gamma\ln n))}{n^{1+\varepsilon}}\geq 0,$$

поскольку $\Lambda(n)\geq 0$.

Далее, $-3\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon)\leq\frac{3}{\varepsilon}+c_1$ для нек-рой c_1.

Существует также $c_2>0$ такое, что

$$-4\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+i\gamma)\leq-\frac{4}{1+\varepsilon-\beta}+c_2\ln(|\gamma|+2)$$

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+2i\gamma)\leq c_2\ln(|\gamma|+2).$$

Scanned by TapScanner

Такое соотношение можно написать, поскольку

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_n} = -\frac{\sigma-\beta_n}{|s-\rho_n|^2} < 0 \text{ при}$$

$\sigma > 1$..

Наше неравенство даёт

$$\frac{3}{\varepsilon} - \frac{4}{1+\varepsilon-\beta} + c_3 \ln(|\gamma|+2) \geq 0.$$

Положим $L = c_3 \ln(|\gamma|+2)$.

Получаем

$$\frac{4}{1+\varepsilon-\beta} \leq \frac{3}{\varepsilon} + L \Rightarrow \frac{1+\varepsilon-\beta}{4} \geq \left(\frac{3}{\varepsilon}+L\right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{3+\varepsilon L} \Rightarrow$$

$$1-\beta \geq \frac{4\varepsilon}{3+\varepsilon L} - \varepsilon = \frac{\varepsilon-\varepsilon^2 L}{3+\varepsilon L}$$

Положим $\varepsilon = \frac{1}{2L}$. Тогда $3+\varepsilon L = 3+\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ и

$\varepsilon - \varepsilon^2 L = \frac{1}{2L} - \frac{1}{4L} = \frac{1}{4L}$, откуда

$$1-\beta \geq \frac{\frac{1}{4L}}{7/2} = \frac{1}{14L}, \text{ то есть } 1-\beta \geq \frac{1}{14 c_3 \ln(|\gamma|+2)} \ \square$$

Scanned by TapScanner

Следствие 1. Существует $c>0$ такое, что

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

$$\pi(x) = li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

это асимптотический закон распределения простых чисел

Д-во: Из явной ф-лы и Теоремы 1 следует равенство

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right) =$$

$$= x + O\left(x^{1-\frac{c}{\ln T}} \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\le T} \frac{1}{|\rho|} + \frac{x\ln^2 x}{T}\right).$$

Мы знаем, что между N и $N+1$ находится $O(\ln(N+2))$ ординат нулей $\zeta(s)$ $\Rightarrow$

$$\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\le T} \frac{1}{|\rho|} \ll \sum_{N\le T} \frac{\ln(N+2)}{N} \ll \ln^2 T.$$

Scanned by TapScanner

Следовательно,

$$\psi(x) = x + O\left(x \ln^2 x \left(x^{-\frac{c}{\ln T}} + T^{-1}\right)\right)$$

Возьмём $T = e^{\sqrt{c \ln x}}$, получим

$$T^{-1} = x^{-\frac{c}{\ln T}} = e^{-\sqrt{c \ln x}}$$

Поскольку $\ln^2 x \ll e^{\frac{\sqrt{c \ln x}}{2}}$, получаем

$$\psi(x) = x + O\left(x e^{-\frac{\sqrt{c \ln x}}{2}}\right)$$

Второе соотношение получается из суммирования по частям.

<u>Следствие 2</u> при $1 - \frac{c_1}{\ln T} \le \sigma$, $2 \le |t| \le T$ имеем

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) \ll \ln^2 T.$$

В самом деле, достаточно считать, что $\sigma \le 2$.

Тогда

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) = \frac{1}{\sigma - 1 + iT} - \sum_{|\gamma_n - T| \le 1} \frac{1}{\sigma + iT - \rho_n} + O(\ln T)$$

Для каждого слагаемого выполнено

$$\left|\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n}\right| \le \frac{1}{\sigma-\beta_n} \le \frac{1}{1-\frac{c_4}{\ln T}-1+\frac{c}{\ln(|t|+2)}} \ll$$

$$\ll \ln T$$

Сумма содержит $O(\ln T)$ слагаемых $\Rightarrow$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT) \ll \ln^2 T.$$

Используем теперь наши знания о нулях $\zeta(s)$ для того, чтобы получить оценки для функции Мертенса

$$M(x) := \sum_{n\le x}\mu(n).$$

Так как $M(x)$ выражается через интегралы от $\zeta(s)^{-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$, нам нужны нижние оценки для $\zeta(s)$, то есть верхние для $\frac{1}{\zeta(s)}$.

Scanned by TapScanner

Теорема 2. Для некоторого $c_5 > 0$

при $\sigma \ge 1 - \frac{c_5}{\ln(|t|+2)}$ выполнена оценка

$$\zeta(\sigma+it)^{-1} \ll \ln^2(|t|+2).$$

В доказательстве данной теоремы мы будем пользоваться теоремой Бореля-Каратеодори.

Теорема 3

Пусть $R>0$, $f(s)$ — аналитическая в окрестности круга $|s|=R$ функция. Пусть $f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ и

$$M = \max_{|s|=R} \mathrm{Re}(f(s) - f(0)).$$

Тогда

i) $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| = |a_n| \le 2R^{-n}M$ при $n \ge 1$

ii) $\max\limits_{|s|\le r} |f(s) - f(0)| \le \frac{2r}{R-r} M$

iii) $\max\limits_{|s|\le r} |f^{(n)}(s)| \le 2n! \cdot \frac{R}{(R-r)^{n+1}} M$ при $n \ge 1$.

Scanned by TapScanner

Доказательство: Соотношения ii) и iii) следуют из

i). Например, если $|a_n| \le 2R^{-n}M \quad \forall n \ge 1$, то

$$\max_{|s| \le r} |f(s) - f(0)| = \max_{|s| \le r} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n \le 2M \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = 2M \cdot \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2Mr}{R-r}.$$

Докажем i).

По теореме Коши,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{-n-1} ds \underset{s = Re^{i\varphi}}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \cdot R^{-n-1} e^{-(n+1)i\varphi} \cdot iRe^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Для отрицательных n имеем $a_n = 0$, так что

Scanned by TapScanner

$$\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Сопрягая, получаем $\int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi = 0$

Сложив с предыдущим соотношением, доказываем, что

$$a_n = \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$$

Заметим, что при $n > 0$ $\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi = 0 \Rightarrow$

$$a_n = \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(Re^{i\varphi}) - f(0)) e^{-in\varphi} d\varphi$$

По условию, $\operatorname{Re}(f(Re^{i\varphi}) - f(0)) \leq M$, так что

$$a_n = \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re}(f(Re^{i\varphi}) - f(0)) - M) e^{-in\varphi} d\varphi \text{ и}$$

$$|a_n| \leq \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} |M - \operatorname{Re}(f(Re^{i\varphi}) - f(0))| d\varphi =$$

$$= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (M - \operatorname{Re}(f(Re^{i\varphi}) - f(0))) d\varphi.$$

Scanned by TapScanner

Легко видеть, что

$$f(Re^{i\varphi}) - f(0) = \sum_{n>0} a_n (Re^{i\varphi})^n \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \left(f(Re^{i\varphi}) - f(0)\right) d\varphi = 0,$$ так что

$|a_n| \le 2MR^{-n}$ □

<u>Доказательство Теорема 2:</u>

Заметим, что $\forall N, \sigma > 0$

$$\zeta(\sigma+it) = \sum_{n \le N} n^{-\sigma-it} + \frac{N^{1-\sigma-it}}{\sigma-1+it} + (\sigma+it)\int_N^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1+it}}dx$$

При $1-\sigma \ge \frac{A}{\ln(|t|+2)}$ имеем

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \sum_{n \le t} n^{-1} + O\left((|t|+2)\, t^{-\sigma}\right) \ll \ln(|t|+2)$$

Из Теоремы 1 мы знаем, что $f(s) = \ln\zeta(s)$ имеет голоморфное продолжение в область $1-\sigma \le \frac{c}{\ln(|t|+2)}$ (там нет нулей)

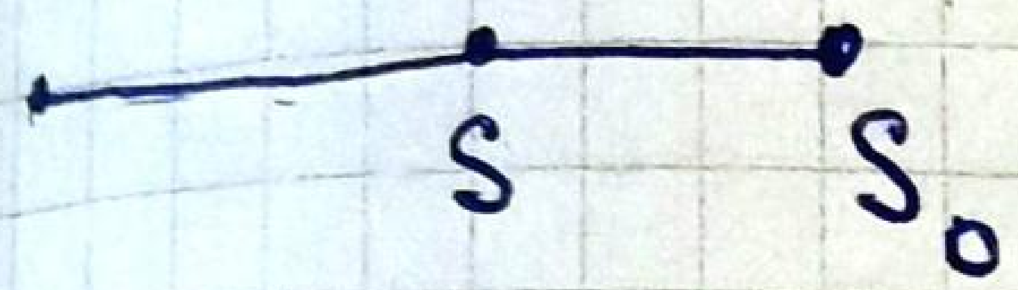
Scanned by TapScanner

В этой области имеем

$$\operatorname{Re} f(s) = \ln|\zeta(s)| \le \ln(|t|+2) + c$$

Пусть $s = \sigma + it$ и $\sigma \ge 1 - \frac{c}{20\ln(|t|+3)}$.

Положим $s_0 = 1 + \frac{c}{20\ln(|t|+3)} + it$



Положим теперь $r = \frac{c}{10\ln(|t|+3)}$ и $R = \frac{c}{\ln(|t|+3)}$.

Так как $\operatorname{Re}(s_0 - R) = 1 - \frac{19c}{20\ln(|t|+3)} > 1 - \frac{c}{\ln(|t|+2)}$

(для больших $|t|$), $f(z)$ голоморфна в $|z - s_0| \le R$

По теореме Бореля–Каратеодори тогда получаем

$$\max_{|z|\le r} |f(z) - f(s_0)| \le \frac{2r}{R-r}\cdot(\ln(|t|+2)+c) =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{R}{10}}{R - \frac{R}{10}}\cdot(\ln(|t|+2)+c) = \frac{2}{9}(\ln(|t|+2)+c).$$

Scanned by TapScanner

Следовательно

$$|\operatorname{Re} f(s) - \operatorname{Re} f(s_0)| \le \frac{2}{9}\left(\ln(|t|+2) + c\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(s_0) - \operatorname{Re} f(s) \le \frac{2}{9}\left(\ln(|t|+2) + c\right),\ \text{т.е.}$$

$$\ln|\zeta(s)| \ge \ln|\zeta(s_0)| - \frac{2}{9}\left(\ln(|t|+2) + c\right),\ \text{то}$$

есть

$$\zeta(s) \gg |\zeta(s_0)|\left(\ln(|t|+2)\right)^{-2/9}.$$

Легко видеть (упражнение!), что

$$|\zeta(s_0)| \ge |\zeta(\operatorname{Re} s_0)|^{-1} = |\zeta\left(1 + \frac{c}{20\ln(|t|+2)}\right)|^{-1} \gg$$

$$\gg \frac{1}{\ln(|t|+2)} \quad \text{и} \quad |\zeta(s_0)| \gg \left(\ln(|t|+2)\right)^{-\frac{11}{9}},$$

$$|\zeta(s_0)| \gg \left(\ln(|t|+2)\right)^{-2},\ \text{что и требовалось.}$$

<u>Замечание</u>: ясно, что так же можно получить

$$\ln(|t|+2)^{-1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Scanned by TapScanner

Оценим $M(x)$.

Теорема 4 Для некоторого $c_6>0$ выполнена оценка

$$M(x) \ll x e^{-c_6\sqrt{\ln x}}.$$

Доказательство:

Из формулы Перрона получаем для полуцелых x

$$M(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds+O\left(\frac{x\ln x}{T}\right),$$ где

$T\le x$ и $c=\frac{1}{\ln x}+1$.

Сдвинем контур на прямую $\operatorname{Re} s = 1-\frac{c_5}{\ln(T+2)} = d$

и воспользуемся Теоремой 2. По т. Коши,

$$\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds=\left(\int\limits_{c-iT}^{d-iT}+\int\limits_{d+iT}^{c+iT}+\int\limits_{d-iT}^{d+iT}\right)\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Первые два интеграла равны по модулю. Оценим второй:

$$\left|\int_{d+iT}^{c+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}\, ds\right| \ll \int_{d}^{c} \ln^2 T \cdot \frac{x^\sigma}{T}\, d\sigma \ll \frac{x^c \ln^2 T}{T \ln x} \ll$$

$$\ll \frac{x \ln x}{T}.$$

Третий интеграл:

$$\left|\int_{d-iT}^{d+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds\right| \ll \ln^2 T \cdot x^d \int_{d-iT}^{d+iT} \frac{|ds|}{|s|} \ll x^d \ln^3 T, \text{ то}$$

есть

$$M(x) \ll x^{1-\frac{c_5}{\ln(T+2)}} \ln^3 T + \frac{x \ln x}{T}$$

Выбор $T = e^{\sqrt{c_5 \ln x}}$ завершает доказательство.

Поскольку доказанная нами граница вовсе не лучшая из известных, на данный момент известны более сильные оценки $M(x)$.

Scanned by TapScanner

Известно, что $\max\limits_{y\le x}|M(y)| \gg \sqrt{y}$.

Гипотеза Мертенса гласит, что $|M(x)|\le\sqrt{x}$.

Известно, что в такой форме она неверна, а также известно, что если $\zeta(s)$ имеет кратные нули или нули имеют линейно независимые над $\mathbb{Q}$ мнимые части, то

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Также известны некоторые вероятностные модели для $M(x)$. Разумеется, про $M(x)$ можно думать как о траектории случайного блуждания. Предполагаемый аналог закона повторного логарифма в этом случае имеет вид

$$0<\limsup_{x\to+\infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}(\ln\ln\ln x)^{5/4}}<\infty.$$

Scanned by TapScanner