Лекция 2. 14.09.2021.

Мультипликативные функции, произведение Эйлера и Аналитическое продолжение $\zeta(s)$.

Как уже было упомянуто в прошлой лекции, значения $\zeta(s)$ появляются естественным образом в асимптотических формулах для сумм многих классических арифметических функций. Вызвано это тем, что n^{-s} — естественный и мультипликативный "моном" для производящих функций, а также с понятием мульт. свёртки.

Определение Функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ мультипликативна, если $f(ab) = f(a)f(b)$ $\forall (a,b)=1$.

Определение $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ <u>вполне</u> мультипликативна, если $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех a и b.

Мультипликативные функции однозначно задаются своими значениями на степенях простых чисел, а вполне мультипликативные — значениями на простых числах.

Определение Свёртка Дирихле:

$$(f*g)(n) := \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Производящий ряд:

$$D_f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$$

(Заметьте, что $D_f(s)$ не обязан, вообще говоря, сходиться хоть где-нибудь)

Алгебра всех формальных рядов Дирихле изоморфна $\mathbb{C}[[x_2, x_3, x_5, x_7, \ldots]]$ $(p^{-s} \mapsto x_p)$

Scanned by TapScanner

Свёртка $f*g$ соответствует умножению рядов:

$$D_f(s)D_g(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{a,b=1}^{+\infty} \frac{f(a)}{a^s} \cdot \frac{g(b)}{b^s} =$$

$$= \sum_c \frac{1}{c^s} \sum_{ab=c} f(a)g(b) = D_{f*g}(s).$$

f мультипликативна тогда и только тогда, когда $D_f(s)$ раскладывается в формальное произведение Эйлера:

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right)$$

произведение по простым числам.

В самом деле, после раскрытия всех скобок "моном" $n^{-s} = p_1^{-\alpha_1 s} \ldots p_k^{-\alpha_k s}$ появится единственный раз (в силу однозначности разложения на множители), а именно как

$$\frac{f(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1 s}} \cdot \frac{f(p_2^{\alpha_2})}{p_2^{\alpha_2 s}} \cdot \ldots \cdot \frac{f(p_k^{\alpha_k})}{p_k^{\alpha_k s}} = \frac{f(n)}{n^s},$$ то есть

с тем же коэффициентом, что и слева!

Данное утверждение можно назвать комбинаторной версией основной теоремы арифметики.

Если и только если f вполне мультипликативна, имеем $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ и, следовательно,

$$1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}},$$ так что

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

В частности, для самой (или одной из) очевидной мультипликативной функции $1(n) = 1$, имеем

$$\zeta(s) = D_1(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Последнее равенство и есть произведение Эйлера в той форме, в которой он его доказал. Как равенство двух комплекснозначных функций данное соотношение можно воспринимать как аналитическую форму основной теоремы арифметики.

(равенство верно при $\sigma > 1$, т.к. ряд $\sum p^{-\sigma}$ сходится)

Единица алгебры формальных рядов Дирихле-производящая функция для $\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n=1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$1(n)$ была бы единицей, возьми мы вместо свёртки Дирихле покоординатное умножение.

Примеры функций, которые можно получить свёрткой:

$\tau = 1*1$ — функция делителей, т.е. число делителей аргумента.
и
d

$\tau_k = \underbrace{1*1*\ldots*1}_{k \text{ раз}}$ - высшая функция делителей.
и
d_k

$\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k = 1*(n \mapsto n^k)$ - сумма k-ых степеней делителей.

Чтобы построить больше интересных функций, заметим, что в произведении Эйлера для $\zeta(s)$ присутствует -1-ая степень, что показывает, что $\zeta(s)$ легко обратить:

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Раскрыв скобки, легко увидеть, что

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \text{ где}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, \text{ если } n = p_1 \ldots p_k, \ p_i \neq p_j \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$ — функция

Мёбиуса.

Из этого соотношения следует, что если $f = g * 1$, то $g = f * \mu$ и обратно, т.е.

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

формула обращения Мёбиуса.

При помощи $\mu(n)$ можно представить многие другие арифметические функции в виде свёртки.

Например, $\mu^2(n)$ есть, очевидно, характеристическая функция бесквадратных чисел. Пусть $D(n)^2$ — наибольший квадрат, делящий n. Тогда

$$\mu^2(n) = \delta_1(D(n)) = \sum_{d|D(n)} \mu(d) = \sum_{d^2|n} \mu(d), \text{ так что}$$

$\mu^2(n) = 1 * \mu(\sqrt{\cdot})$.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ считает $k \le n$, взаимно простые с n.

$$\varphi(n) = \sum_{k \le n} \delta_1((k,n)) = \sum_{k \le n} \sum_{d \mid (k,n)} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d \mid n} \mu(d) \cdot \#(k \le n,\ k \equiv 0\ (d)) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} \Rightarrow$$

$\varphi = 1 * (n \mapsto n)$.

Пример появления $\zeta(s)$ в асимптотиках:

$$\sum_{n \le x} \mu^2(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \sum_{d \le \sqrt{x}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^2}\right] =$$

$$= x \sum_{d \le \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

$$\sum_{n \le x} \varphi(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d \mid n} \frac{n}{d} \mu(d) = \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv 0 (d)}} n =$$

$$= \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d} \left(d \cdot \left(\frac{x^2}{2d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right) \right) \right) = \frac{x^2}{2} \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x \ln x) =$$

$$= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \ln x).$$

Scanned by TapScanner

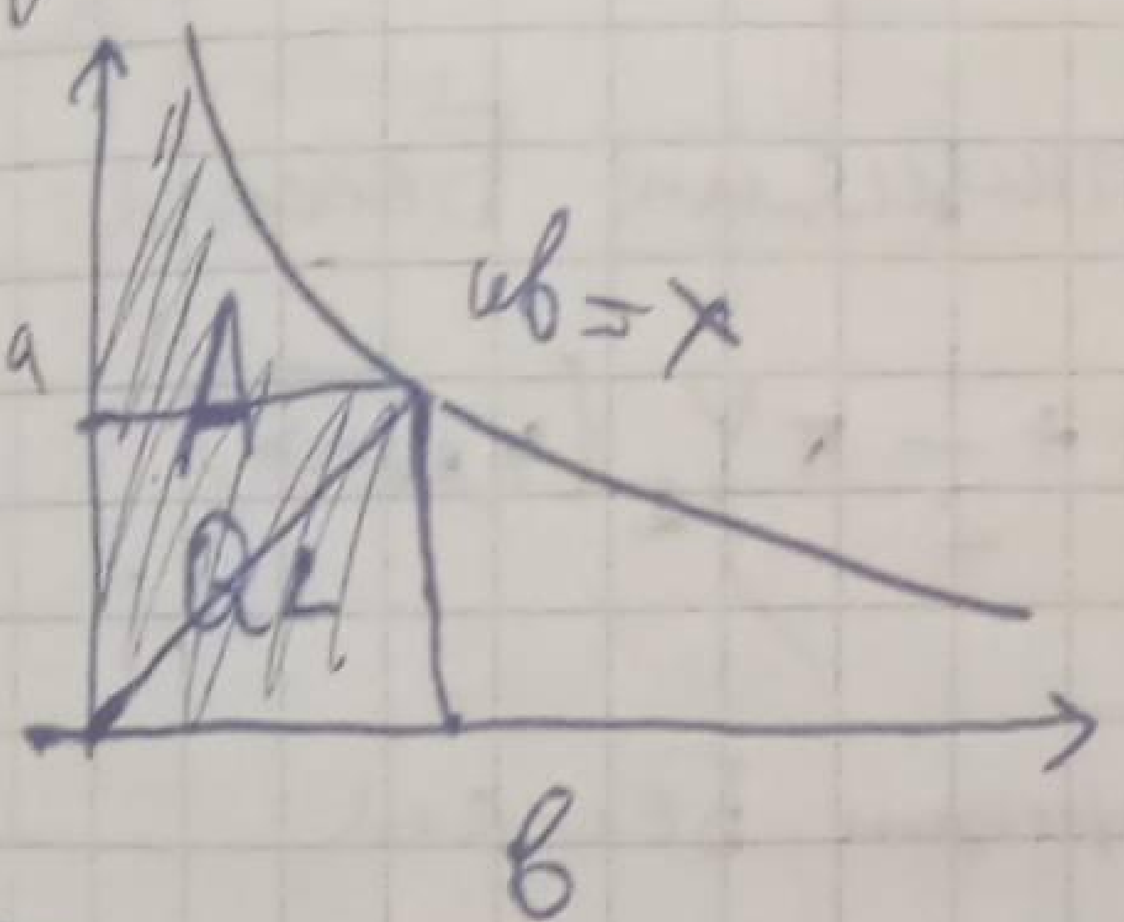
В частности, вероятность* того, что случайное натуральное число бесквадратно есть $\frac{1}{\zeta(2)}$ и такова же вероятность взаимной простоты двух случайных a и b с $a \le b$.

Чуть более хитрый пример:

<u>Метод гиперболы Дирихле</u>

$$\sum_{n \le x} \tau(n) = \sum_{ab \le x} 1 = \text{число целых положительных точек}$$

под гиперболой $ab = x$.



Очевидна симметрия относительно прямой L $\Rightarrow$ число точек в A равно числу точек в симм. области. Квадрат Q учтён дважды $\Rightarrow$

$$\sum_{n \le x} \tau(n) = 2 \sum_{b \le \sqrt{x}} \left[\frac{x}{b}\right] - \left[\sqrt{x}\right]^2 = 2x \sum_{b \le \sqrt{x}} \frac{1}{b} - x + O(\sqrt{x}) =$$

$$= 2x\left(\ln\sqrt{x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - x + O(\sqrt{x}) = x\ln x + (2\gamma - 1)x +$$

$$+ O(\sqrt{x}) =: x \ln x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x).$$

* здесь это слово применяется не в совсем буквальном смысле

Оценки для $\Delta(x)$:

Дирихле $\Delta(x) \ll \sqrt{x}$

Вороной 1904 $\Delta(x) \ll \sqrt[3]{x} \ln x$

далее показатели степени x:

ван дер Корпут $\frac{33}{100}$ (1922 г.), $\frac{27}{82}$ (1928 г.)

Рихерт / Цзун-Тао $\frac{15}{46}$
(1953) (1950)

Колесник: $\frac{12}{37}$ (1969), $\frac{346}{1067}$ (1973), $\frac{35}{108}$ (1982).

Иванец-Мозочи $\frac{7}{22}$ (1988)

Хаксли $\frac{131}{416}$ (2003).

Вороной получил формулу с функциями Бесселя:

$$\Delta(x) = \underset{\zeta(0)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left(K_1\left(4\pi\sqrt{nx}\right) + \frac{1}{2}\pi Y_1\left(4\pi\sqrt{nx}\right) \right)$$

функции Бесселя второго рода.

Можно также заметить, что главный член $x \ln x + (2\gamma - 1)x$ равен $\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s) \cdot \frac{x^s}{s}$;

(это несложно)

Функциональное уравнение для $\zeta(s)$.

Ранее также упоминались формулы суммирования в контексте появления $\zeta(s)$. Здесь мы представим обратную связь: формула суммирования Пуассона $\Rightarrow$ функциональное уравнение $\zeta(s)$.

Формула сумм. Пуассона определяется в терминах преобразований Фурье. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} \, dx.$$

Теорема 1 Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $|f(x)| + |\hat{f}(x)| \ll \frac{1}{x^2}$.

Тогда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m).$$

Доказательство:

$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ — функция на $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Её коэффициенты Фурье:

$$\hat{F}(m) = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i m x} = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i m x} \, dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n}^{n+1} f(x) e^{-2\pi i m x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i m x}\,dx = \hat{f}(m).$$

$\Rightarrow$ Разложение Фурье для $F(x)$ выглядит так

$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

Сходимость в $x=0$ обеспечена признаком Дини (например, потому что $F' \in L^2$), так что

$$F(0) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

и

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

что и требовалось доказать.

<u>Теорема 2</u> Если $\xi(s) = \Gamma(s/2)\,\pi^{-s/2}\,\zeta(s)$, то $\xi(s)$ продолжается до мероморфной [redacted] функции во всём $\mathbb{C}$ и удовлетворяет уравнению

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Scanned by TapScanner

Здесь $\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$ — гамма-функция.

$\Gamma(s)$ „продолжает" факториал, В частности, $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$.

Является частным примером преобразования Меллина:

$$\tilde{f}(s) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) x^{s-1}\, dx.$$

Докажем теорему 2, применив формулу суммирования Пуассона к семейству функций $g_t(x) = e^{-\pi t x^2}$, а затем преобразование Меллина.

<u>Лемма 1</u> $\hat{g}_t(y) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, g_{t^{-1}}(y)$

<u>Доказательство:</u> Заметим сначала, что

$\hat{g}_t(0) \geq 0$ и $\hat{g}_t(0)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi t (x^2+y^2)}\, dx\, dy \underset{\text{координаты}}{\overset{\text{полярные}}{=}}$

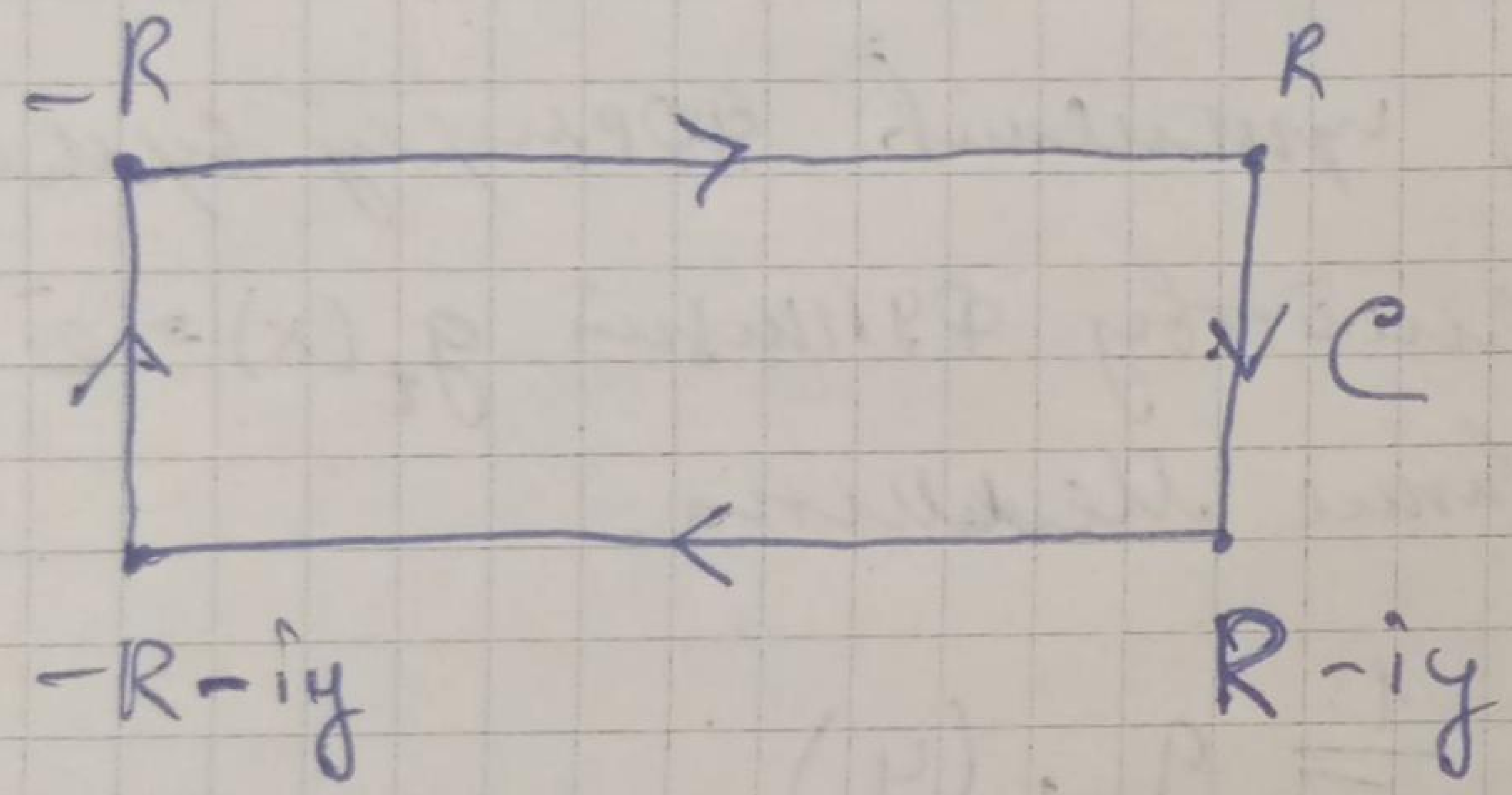
$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\pi t r^2}\, dr \Big)\, d\varphi = \frac{1}{t} \Rightarrow \hat{g}_t(0) = \frac{1}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\, g_{t^{-1}}(0).$$

Далее, при $y \neq 0$

$$\hat{g}_t(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2 + 2\pi i x y}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t\left(\left(x - \frac{iy}{t}\right)^2 + \frac{y^2}{t^2}\right)}\,dx =$$

$$= e^{-\frac{\pi y^2}{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t \left(x - \frac{iy}{t}\right)^2}\,dx$$



$\int_C e^{-\pi t z^2}\,dz = 0$ по ф-ле Коши.

Для больших R интегралы по краям $\to 0$ (более, чем экспоненциально!) $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t \left(x - \frac{iy}{t}\right)^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}},$$ что

и требовалось.

Следствие 1:

Если $\theta(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$, то $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\,\theta(x)$.

Д-во: Т1 + Л1:

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_x(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}_x(m) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_{x^{-1}}(m) = \frac{\theta(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}},$$

что и требовалось.

Следствие 2: $\theta'(1) = -\frac{\theta(1)}{4}$. и $e^{\pi} - \pi \approx 20$.

Ряд с экспонентами сходится очень быстро, так что

$\theta(1) \approx 1 + 2e^{-\pi}$ и $\theta'(1) \approx -2\pi e^{-\pi} \Rightarrow$

$e^{\pi} \approx 8\pi - 2$. Также, $\pi \approx \frac{22}{7} \Rightarrow e^{\pi} \approx \pi + 20$.

В самом деле, $e^{\pi} - \pi \approx 19{,}9990999$

Доказательство Теоремы 2: Определим $\omega(x) = \frac{\theta(x) - 1}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} \omega(x)\, x^{s/2-1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \cdot x^{s/2-1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \pi^{-s/2} n^{-s}\, \Gamma(s/2) =$$

$$= \zeta(s)\, \pi^{-s/2}\, \Gamma(s/2) = \xi(s).$$

Далее, $\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\theta\left(\frac{1}{x}\right)-1}{2} = \omega(x)\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}.$

$$\xi(s) = \int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s/2-1}\,dx = \int_1^{+\infty} \omega(x) x^{s/2-1}\,dx + \int_0^1 \omega(x) x^{s/2-1}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \omega(x) x^{s/2-1}}_{I(s)} + \int_1^{+\infty} \left(\omega(x)\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\right) x^{-s/2-1}\,dx =$$

$$= I(s) + J(s) + \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\right) x^{-s/2-1} = I(s) + J(s) - \frac{1}{s(1-s)}$$

Теперь достаточно заметить, что $J(s) = I(1-s)$ и

$I(s)$ – функция, голоморфная при всех $s \in \mathbb{C}$.