Лекция 7. 19.10.2021.

Ещё о нулях.

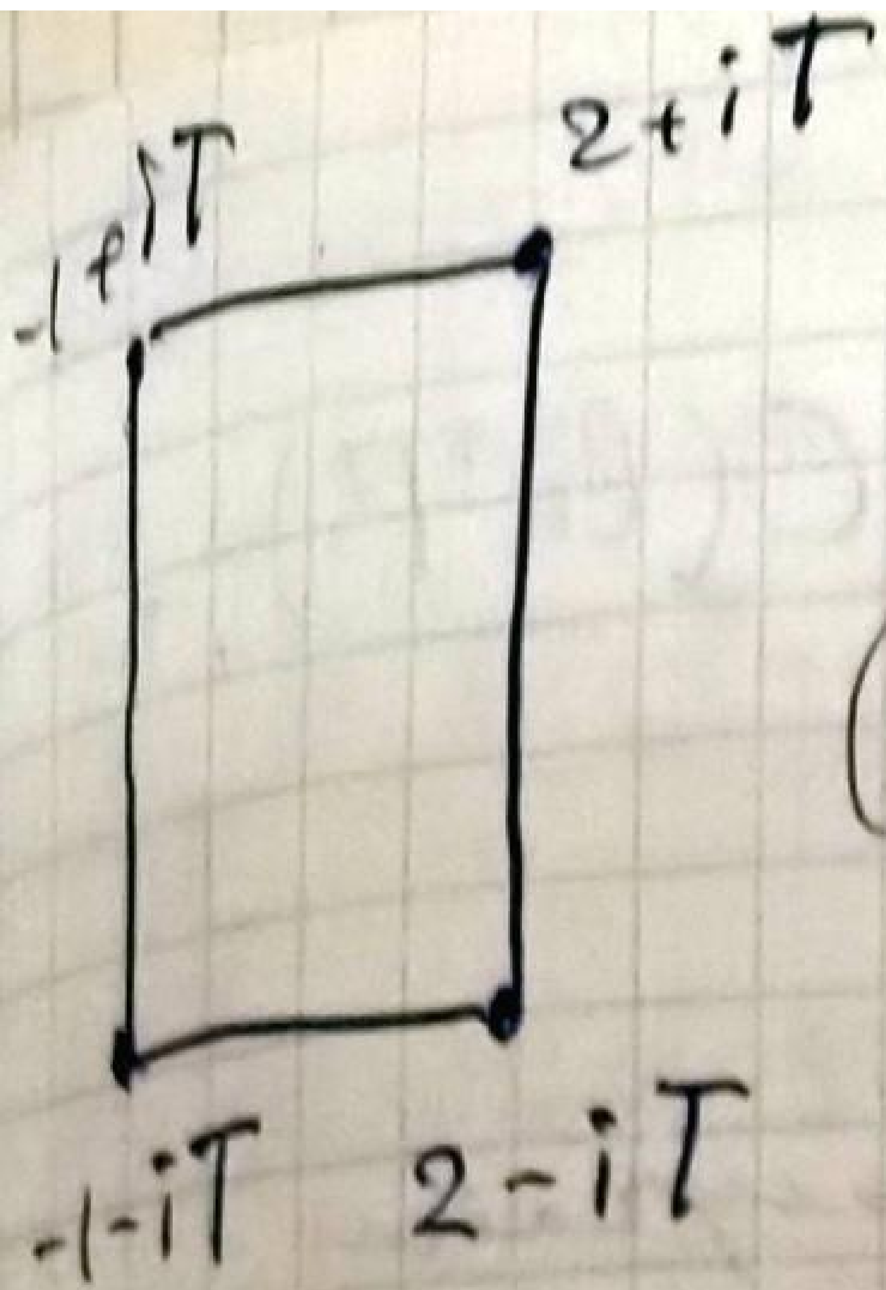
В этой лекции мы установим некоторые асимптотические результаты о нулях $\zeta(s)$, а также найдём взаимосвязь между оценками для $\zeta(s)$ в областях, прилегающих к краю крит. полосы и границами нулей.

<u>Теорема 1</u> Пусть $N(T) = \#(\rho = \beta + i\gamma : \zeta(\rho) = 0$ и $0 < \gamma \le T)$. Тогда

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T)$$

<u>Доказательство</u>: Так как кратности нулей суть $O(\ln T)$ (и вообще, $\#(\gamma : |\gamma - T| \le 1) \ll \ln T$), достаточно считать, что $\gamma \ne T$. $\forall \gamma$

Пусть $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Ясно, что нетривиальные нули $\zeta(s)$ – это нули $\xi(s)$ и наоборот, так что если контур Γ задать так:



то $2N(T) = \int\limits_\Gamma \frac{\xi'}{\xi}(s)\,ds$

(в силу симметрии мн-ва нулей относительно сопряжения).

По определению,

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(s/2\right) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

Кроме того, формула Стирлинга гласит, что

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(s/2\right) = \ln\frac{s}{2} + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

и из лекции 5 мы знаем, что

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) = \sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + O(\ln(|t|+2)).$$

Формула выше переписывается как

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left(\frac{\xi'}{\xi}(2+it) - \frac{\xi'}{\xi}(-1+it)\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{2}\left(\frac{\xi'}{\xi}(\sigma-iT) - \frac{\xi'}{\xi}(\sigma+iT)\right)d\sigma = I_1 + I_2.$$

Согласно формулам выше,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{2}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma - iT) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)\right)d\sigma + O(\ln T), \text{ т.}$$

все остальные слагаемые $O(\ln T)$

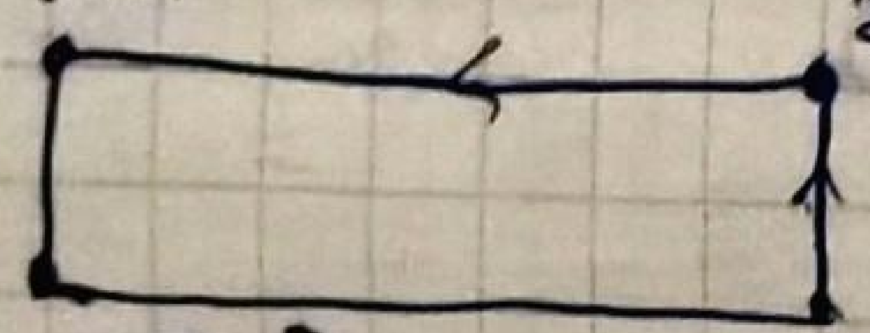
Пользуясь приближением для $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, получаем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{2}\left(\sum_{|T+\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma - iT-\rho_n} - \sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n}\right)d\sigma + O(\ln T) =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_{-1}^{2}\sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n}\,d\sigma + O(\ln T)$$

Рассмотрим контур Γ_1:

$-1+iT$ $\quad$ $2+iT$



$-1+i(T-2)$ $\quad$ $2+i(T-2)$

По ф-ле Коши, $-\int_{-1}^{2}\sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n}\,d\sigma + \int_{2+i(T-2)}^{2+iT}\sum \ldots + \int_{-1+i(T-2)}^{-1+iT} + \ldots =$

$$= 2\pi i\,\#(\rho : T \le \gamma_n \le T-2) = O(\ln T).$$

Вклады остальных трёх слагаемых тоже $O(\ln T)$,

Scanned by TapScanner

интегралу на всех сторонах контура, кроме верхней, все слагаемые $O(1)$ и их $O(\ln T)$ $\Rightarrow$

$I_2 = O(\ln T)$.

Вычислим теперь I_1 при помощи функционального уравнения. Т.к. $\xi(s) = \xi(1-s)$,

$-\frac{\xi'}{\xi}(-1+it) = \frac{\xi'}{\xi}(2-it) \Rightarrow$

$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left(\frac{\xi'}{\xi}(2+it) + \frac{\xi'}{\xi}(2-it)\right)dt$. Заметим, что

$\frac{\xi'}{\xi}(2+it) + \frac{\xi'}{\xi}(2-it) = \frac{4}{4+t^2} + \frac{1}{1+t^2} - \ln\pi + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{4}\right) +$

$+ \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(2-it) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right)$

Интегралы от первых двух слагаемых по всей прямой сходятся, $-\ln\pi$ даёт вклад $-2T\ln\pi$ в интеграл,

$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{4}\right) = O(1)$ при $|t| \leq 1$, а при $|t| > 1$

$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{4}\right) = \ln\frac{|t|}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{t^2}+1\right) = \ln\frac{|t|}{2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow$

$$I_1 = -\frac{T\ln\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_1^T \ln\frac{t}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(2-it)\right)dt +$$

$$+ O(\ln T)$$

Второй интеграл берётся. Он равен

$$T\ln T - T - 1 - T\ln 2 + \ln 2 = T\ln\frac{T}{2} - T + O(1)$$

В третьем интеграле

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(2-it) = \sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^2}\left(n^{it}+n^{-it}\right)$$

Легко видеть, что при $n\geq 2$ $\displaystyle\int_{-T}^{T}\left(n^{it}+n^{-it}\right)dt =$

$$= 2\int_{-T}^{T} n^{it}\,dt = \frac{2\left(n^{iT}-n^{-iT}\right)}{i\ln n} \ll \frac{1}{\ln n} \Rightarrow$$

интеграл есть $O\left(\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^2\ln n}\right) = O(1)$.

Итого

$$I_1 = \frac{T}{\pi}\ln\frac{T}{2} - \frac{T}{\pi} - \frac{T\ln\pi}{\pi} + O(\ln T) =$$

$$= \frac{T}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\ln T),$$ откуда и получаем требуемое.

Обсудим теперь связь между оценками для $\zeta(s)$ и границами нулей. Она устанавливается при помощи теоремы Бореля-Каратеодори.

Теорема 2 Пусть $\varphi(t)$ и $\frac{1}{\theta(t)}$ - положительные функции, неубывающие при $t \geq t_0$ и такие, что $\theta(t) \leq 1$ и $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Пусть $\frac{\varphi}{\theta}(t) = o\left(e^{\varphi(t)}\right)$ при $t \to \infty$. Если $\zeta(s) \ll e^{\varphi(t)}$ для $1-\theta(t) \leq \sigma \leq 2$, $t \geq t_0$, то в области $\sigma \geq 1 - C\frac{\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)}$ для некоторого $C > 0$ нет $t \geq t_0$ нулей $\zeta(s)$.

Напомним часть теоремы Бореля-Каратеодори: если $f(s) = \sum\limits_{n\geq 1} a_n s^n$, $M = \max\limits_{|s|\leq R} \operatorname{Re}(f(s)-f(0))$, то $|a_n| \leq 2R^{-n}M$.

Лемма 1 Пусть функция $f(z)$ голоморфна при $|z-z_0| \leq r$, $f(z_0) \neq 0$ и $\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right| \leq M$ $\forall\, |z-z_0| \leq r$. Если $f(z) \neq 0$ при $|z-z_0| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(z-z_0) \geq 0$, то

$$\operatorname{Re}\frac{f'}{f}(z_0) \geq -\frac{4}{r}\ln M$$ и

$$\operatorname{Re}\frac{f'}{f}(z_0) \geq -\frac{4}{r}\ln M + \operatorname{Re}\frac{1}{z_0-\rho},$$ где ρ — любой нуль

f с $|\rho - z_0| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(\rho - z_0) < 0$.

Доказательство:

Положим $g(z) = f(z)\prod\limits_{\rho}(z-\rho)^{-1}$, где произведение берётся по всем ρ в круге $|z - z_0| \leq r/2$ с учётом кратности.

При $|z - z_0| = r$ для любого ρ выполнено $|\rho - z_0| \leq r/2 \leq r - |\rho - z_0| \leq |\rho - z| \Rightarrow$

$$\left|\frac{g(z)}{g(z_0)}\right| \leq \left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\prod_{\rho}\frac{z_0-\rho}{z-\rho}\right| \leq M.$$ По принципу максимума, то же верно и внутри круга.

Функция $F(z) = \ln g(z) - \ln g(z_0)$ регулярна при $|z - z_0| \leq r/2$, причём $\operatorname{Re} F(z) \leq \ln M$ согласно рассуждению выше, а также $\operatorname{Re} F(z_0) = 0$

$\Rightarrow$ Теорема Бореля – Каратеодори для $n=1$ даёт

$$|f'(z_0)| \leq 2R^{-1} \ln M = \frac{4}{r} \ln M \text{ (здесь } R = r/2\text{)},$$ то

есть

$$\left| \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z_0 - \rho} \right| \leq \frac{4}{r} \ln M$$, так что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'}{f}(z_0) - \sum_{\rho} \frac{1}{z_0-\rho}\right) \geq -\frac{4}{r} \ln M$$

Но $\operatorname{Re}(z_0 - \rho) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{z_0-\rho} = \frac{\operatorname{Re}(z_0-\rho)}{|z_0-\rho|^2} > 0 \Rightarrow$

в неравенстве

$$\operatorname{Re} \frac{f'}{f}(z_0) \geq \sum_{\rho} \operatorname{Re} \frac{1}{z_0-\rho} - \frac{4}{r} \ln M$$ Вклад каждого

ρ положителен, откуда и получаем нужные нам неравенства.

Докажем теперь <u>Теорему 2</u>:

Пусть $\zeta(\beta + i\gamma) = 0$, $\beta \leq 1$, $\gamma \geq \gamma_0$. Возьмём

$1 + e^{-\varphi(2\gamma+1)} \leq \sigma_0 \leq 2$, $s_0 = \sigma_0 + i\gamma$, $s_1 = \sigma_0 + 2i\gamma$,

$r = \theta(2\gamma + 1)$. Круги $|s - s_0| \leq r$ и $|s - s_1| \leq r$

лежат в области $\sigma \geq 1-\theta(t)$, так как

$t \leq 2\gamma+1$ и

$\sigma_0 - r = \sigma_0 - \theta(2\gamma+1) \geq 1-\theta(2\gamma+1) \geq 1-\theta(t)$.

При $\sigma > 1$ (и достаточно близких к 1) $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \zeta(\sigma) < \frac{A}{(\sigma-1)}$,

так что $\left|\frac{1}{\zeta(s_0)}\right| \leq A e^{\varphi(2\gamma+1)}$, $\left|\frac{1}{\zeta(s_1)}\right| \leq A e^{\varphi(2\gamma+1)}$.

Кроме того,

$\zeta(s) \ll e^{\varphi(t)}$ при $1-\theta(t) \leq \sigma \leq 2 \Rightarrow \exists A_2 > 0$:

$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| < e^{A_2 \varphi(2\gamma+1)}$ $\forall |s-s_0| \leq r$ и

$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_1)}\right| < e^{A_2\varphi(2\gamma+1)}$ $\forall |s-s_1| \leq r \overset{\Lambda 1}{\Rightarrow} \exists A_3 > 0$:

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+2i\gamma) < A_3 \frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}$$

Если $\beta > \sigma_0 - r/2$, то по той же лемме

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+i\gamma) < A_3 \frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{1}{\sigma_0-\beta}$$

Кроме того, для больших γ имеем

$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) < \frac{5}{4(\sigma_0-1)} \Rightarrow$ поскольку $-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) - 4\,\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+i\gamma) - \mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+2i\gamma) \geq 0$, получаем

$$\frac{5}{4(\sigma_0-1)} - 5A_3\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{4}{\sigma_0-\beta} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_0-\beta \geq \left(\frac{15}{16(\sigma_0-1)} + \frac{5}{4}A_3\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1}.$$

Полагая $\sigma_0 = 1+\frac{1}{40A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)}$, получим

$$1+\frac{1}{40A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)} - \beta \geq \frac{4}{155A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)} \Rightarrow$$

$1-\beta \geq \frac{1}{940A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)}$. Если же $\beta \leq \sigma_0 - \theta/2$, то

$$\beta \leq 1+\frac{1}{40A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)} - \frac{\theta(2\gamma+1)}{2} \leq 1-\frac{1}{940A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)}$$ для

больших γ. $\square$

Теорема 2 понадобится нам для вывода более сложных границ нулей.

Поговорим теперь об оценках $\zeta(s)$ как таковых.

В прошлый раз мы доказали, что $\zeta(\sigma+it) \ll t^{1-\sigma}\ln t$.

Воспользуемся соображениями комплексного анализа для того, чтобы усилить данную оценку.

<u>Теорема 3</u> А) При $0 \le \sigma \le 1$, $t \ge 2\pi$ справедливо неравенство $\zeta(s) \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t$

Б) Если $\mu(\sigma) = \inf(\mu : \zeta(\sigma + it) \ll (|t|+1)^{\mu})$, то μ - вытукмая функция.

Докажем сначала пункт А).

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$f_\varepsilon(s) = e^{\varepsilon i s + \frac{s-1}{2}\ln(-is)} \cdot \frac{1}{\ln(-is)}.$$

При $0 \le \sigma \le 1$, $t \ge 2\pi$ получаем

$$|f_\varepsilon(s)| = \frac{e^{-\varepsilon t + \frac{\sigma-1}{2}\ln|s| - \frac{\pi}{2}\arg(-is)}}{\sqrt{\ln^2|s| + \arg^2(-is)}} \asymp \frac{t^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\varepsilon t}}{\ln t}$$

Рассмотрим функцию $\zeta(s) f_\varepsilon(s)$ в области $0 \le \sigma \le 1$, $t \ge 2\pi$.

Мы уже знаем, что $\zeta(1+it) \ll \ln t$.

Из функционального уравнения получаем

$$\pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\zeta(it) = \pi^{-\frac{1-it}{2}}\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\zeta(1-it),$$ так что

$$|\zeta(it)| \ll \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\right|}\,|\zeta(1-it)|.$$

Вычислим модули при помощи ф-лы отражения.

$$\left|\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\right|^2 = \Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{1+it}{2}\right)} \asymp e^{-\frac{\pi t}{2}}$$

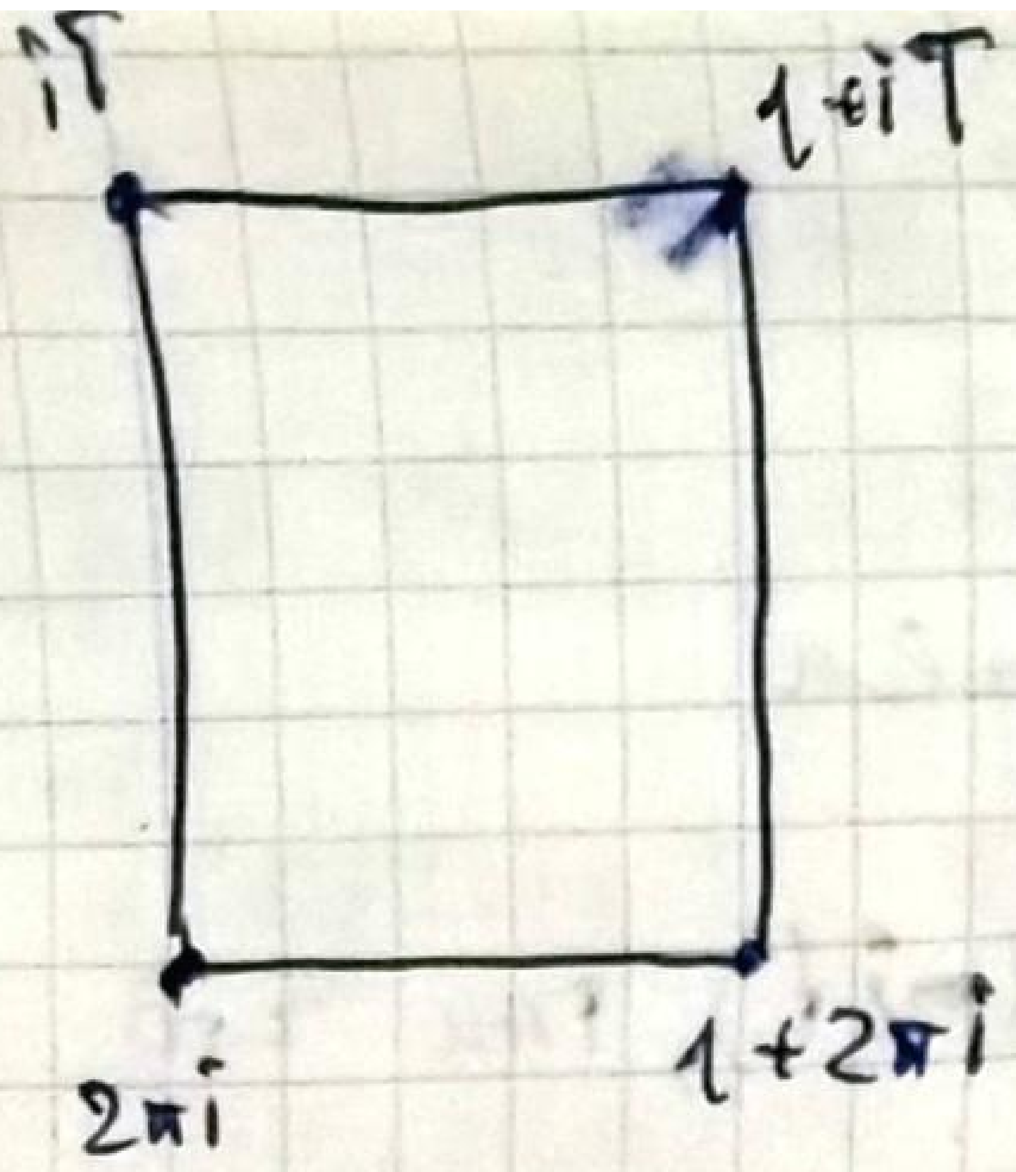
Аналогично, $\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{it}{2}\right) \asymp e^{-\frac{\pi t}{2}} \Rightarrow$

$$\left|\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\right| \asymp t^{-1/2}e^{-\frac{\pi t}{4}}$$ и, стало быть,

$$|\zeta(it)| \ll \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\right|}\,|\zeta(1-it)| \ll \sqrt{t}\ln t.$$

Значит, функция $f_\varepsilon(s)\zeta(s)$ ограничена равномерно по ε и t при $s=it$ и $s=1+it$. То же верно и при $t=2\pi$ (отрезок $[2\pi i, 1+2\pi i]$ компактен)

Возьмём большое T и рассмотрим прямоугольник



При больших T функция $f_\varepsilon(s)\zeta(s)$ стремится к 0 на верхнем отрезке, т.к. $|\zeta(s)| \ll |s|$ и $|f_\varepsilon(s)| \ll e^{-\varepsilon t}$ $\Rightarrow$

Из принципу максимума $f_\varepsilon(s)\zeta(s)$ ограничена равномерно по $\varepsilon > 0$ и $t \geq 2\pi$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получаем $|\zeta(s)| \ll \lim\limits_{\varepsilon \to 0} e^{\varepsilon t} t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t = t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t$, что и требовалось.

Б) Пусть $l(\sigma) = A\sigma + B$ и $\mu(\alpha) < l(\alpha)$, $\mu(\beta) < l(\beta)$. Докажем, что $\zeta(s) \ll t^{l(\sigma)}$ при $\alpha < \sigma < \beta$. Выпуклость из этого следует очевидным образом.

Для док-ва надо f_ε из пункта А заменить на $F_{\varepsilon, l}(s) = e^{\varepsilon i s + l(s) \ln(-is)}$ $\square$.

Гипотеза Линделёфа утверждает, что

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1/2 \leq \sigma \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \sigma & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 1/2. \end{cases}$$

Эквивалентно, $\mu(1/2) = 0$, т.е. $\zeta(\frac{1}{2}+it) \ll t^{\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$.
Данное соотношение справедливо при условии истинности гипотезы Римана.
Оценку $\mu(1/2) \leq 1/6$ доказали Харди, Литтлвуд и Вейль,
$\mu(1/2) \leq \frac{33}{205} \approx 0.1561$ — М. Хаксли (2002), а рекордно низкий показатель $\frac{13}{84} \approx 0.1548$ принадлежит Ж. Бургейну (2017).
Завершим лекцию следующим качественным результатом Харди.

<u>Теорема 4</u> Бесконечно многие нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой.

<u>Доказательство</u> будет использовать обращение Меллина:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) x^{-s}\, dx \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) x^{s-1}\, ds.$$

Из доказательства функционального уравнения для $\zeta(s)$ можно извлечь ф-лу

$$\frac{\xi(s)}{s(s-1)} = \int_0^{+\infty} u^{-s}\left(\theta(u^2) - 1 - \frac{1}{u}\right) du.$$

$$\frac{\xi(s)}{4} = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

Здесь $\theta(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$

Согласно ф-ле обращения Меллина

$$\theta(z^2) - 1 - \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s-1)}\, z^{s-1}\, ds$$

Функция $\theta(z^2)$ хорошо определена в области $W=\{\operatorname{Re} z^2 > 0\}$.

Докажем, что при $z \to e^{\frac{\pi i}{4}}$ внутри W имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\theta(z^2) \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

В самом деле, $\sqrt{z}\,\theta(z) = \theta\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow$

$$\theta(z^2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{-\pi n^2 (z^2 - i)} = 2\theta(4(z^2-i)) - \theta(z^2-i) =$$

$$= \frac{1}{(z^2-i)^{1/2}}\,\theta\left(\frac{1}{4(z^2-i)}\right) - \frac{1}{(z^2-i)^{1/2}}\,\theta\left(\frac{1}{z^2-i}\right) = \frac{1}{(z^2-i)^{1/2}} \sum_{2\nmid n} e^{-\frac{\pi n^2}{4(z^2-i)}}.$$

Все выражения вида $u^k e^{-1/u}$ стремятся к 0 при $u \to +0$ $\Rightarrow$ все производные $\theta(z^2)$ стремятся к 0, как и требовалось.

Далее, $|\zeta(\frac{1}{2}+it)| \ll t^{1/4}$, $\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}) \ll \frac{e^{-\frac{\pi}{4}|t|}}{t^{1/4}} \Rightarrow$

$\xi(\frac{1}{2}+it) \ll |t|^2 e^{-\frac{\pi}{4}|t|} \Rightarrow$ интеграл тоже сходится

для всех $\mathrm{Re}\, z^2 > 0$. Применив оператор

$z\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)z$, получаем

$$H(z) := z\frac{\partial^2}{\partial z^2} z\theta(z^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \xi(s) z^{s-1}\, ds \Rightarrow$$

$$\sqrt{z}\, H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) z^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it\ln z)^n}{n!}\, dt$$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (i\ln z)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi n!}\int_{\mathbb{R}} \xi(\frac{1}{2}+it)\, t^n\, dt$.

$\xi(\frac{1}{2}+it) = \xi(\frac{1}{2}-it) \Rightarrow c_{2n+1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть ТЧ неверна, тогда $\exists T: \xi(\frac{1}{2}+it) > 0$ при $t > T$ или $\xi(\frac{1}{2}+it) < 0$ при $t < T$. Не нарушая общности, предположим первое. Тогда

$$\pi c_{2n}(2n)! = \int_0^{+\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n}\, dt \geq$$

$$\geq 2\int_0^{T+2} \xi\left(\tfrac{1}{2}+it\right) t^{2n}\,dt \geq \int_{T+1}^{T+2} \xi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)dt \cdot (T+1)^{2n} -$$

$$-\int_0^{T} \xi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)dt \cdot T^{2n} = c\,(T+1)^{2n} - d\,T^{2n} \Rightarrow$$

$c_{2n} > 0$ для больших n.

Значит, продифференцировав $\sqrt{z}\,H(z)$ по $i\ln z$ достаточно много раз мы получим ряд Тейлора

$\sum b_m (i\ln z)^{2m}$ с $b_m > 0$.

Но $\frac{d}{d(i\ln z)} = -iz\frac{d}{dz} \Rightarrow$ производные все так же

стремятся к 0 при $z \to e^{\frac{\pi i}{4}}$ и

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}} \sum_m b_m (i\ln z)^{2m} = 0.$$

Выбирая $z = e^{\pi i \alpha}$, $\alpha < \pi/4$, получаем противоречие, т.к.

$$\sum_m b_m (i\ln z)^{2m} = \sum_m b_m \pi^{2m}\alpha^{2m} \geq b_0 > 0. \square$$