Лекция 4. 28.09.2021

L-функции Дирихле и простые числа в арифметических прогрессиях.

В этой лекции мы поговорим о „близких родственницах" дзета-функции Римана — L-функциях Дирихле, а также об их изначальном приложении — доказательстве теоремы

Дирихле о бесконечности простых чисел в арифметических прогрессиях.

Так как речь сегодня в основном пойдёт о периодических функциях на $\mathbb{N}$, сначала мы научимся раскладывать их в ряды Фурье.

(это уже третья инкарнация абстрактного преобразования Фурье в нашем курсе. Первые две: преобразование Фурье на $\mathbb{R}$ и на $\underset{S^1}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{T}}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (коэффициенты Фурье))

Если $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ — q-периодическая функция для некоторого $q \in \mathbb{N}$, то есть $f(n+q) = f(n)$, то

$$f(n) = \sum_{m=0}^{q-1} \hat{f}(m) e^{\frac{2\pi i m n}{q}},$$

где

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i m n}{q}}$$

Данное разложение следует из формулы для геом. прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i k n}{q}} = q\, \delta_q(k)$$

ХАР. ФУНКЦИЯ мн-ва $k \equiv 0\ (q)$

(или, если хотите, из ортогональности характеров на $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$)

Формула Планшереля гласит, что в данном случае

$$\sum_{n=0}^{q-1} |f(n)|^2 = q\sum_{a=0}^{q-1} |\hat{f}(a)|^2.$$

В самом деле,

$$\sum_{n=0}^{q-1} |f(n)|^2 = \sum_{n=0}^{q-1} \left|\sum_{a=0}^{q-1} \hat{f}(a) e^{\frac{2\pi i n a}{q}}\right|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} \sum_{a,b=0}^{q-1} \hat{f}(a)\overline{\hat{f}(b)}\, e^{\frac{2\pi i n(a-b)}{q}} =$$

$$= \sum_{a,b=0}^{q-1} \hat{f}(a)\overline{\hat{f}(b)} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i n(a-b)}{q}} = q\sum_{a=0}^{q-1} |\hat{f}(a)|^2 \quad \square.$$

Так как функции $n \mapsto e^{\frac{2\pi i n m}{q}}$ образуют „аддитивный" базис в функциях на $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, потому что это характеры $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ по сложению, то для изучения мультипликативных свойств $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ естественно использовать характеры $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Периодичные вполне мульт. функции $\chi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ называются характерами Дирихле.

Легко увидеть, что если q – минимальный период характера Дирихле χ, то $\chi(n)=0$ при $(n,q)\neq 1$. Характер называется характером по модулю q, если $\chi(n)=0$ при $(n,q)\neq 1$.

Примеры:

χ_4 – mod 4

	0	1	2	3
χ_4	0	1	0	-1

K – mod 5

	0	1	2	3	4
K	0	1	i	$-i$	-1

ψ – mod 7

	0	1	2	3	4	5	6
ψ	0	1	ζ_6^2	ζ_6	ζ_6^4	ζ_6^5	ζ_6^3

$$\zeta_6=\exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$$

Любую функцию на $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ из соотношений ортогональности характеров можно разложить по χ:

$$f(n)=\sum_{\chi}\tilde{f}(\chi)\,\chi(n)$$

$$\tilde{f}(\chi)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(a,q)=1} f(a)\,\overline{\chi(a)}$$

Соотношения ортогональности имеют две формы:

$$\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi(a)}=\delta_q(n-a)\,\varphi(q) \quad \text{при } (na,q)=1 \quad \text{и}$$

$$\sum_{n \bmod q}\chi(n)\overline{\psi(n)}=\begin{cases}\varphi(q) & \chi=\psi\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Ф-ла Планшереля:

$$\sum_n |f(n)|^2 = \varphi(q) \sum_{\chi} |\tilde{f}(\chi)|^2.$$

Характер $\chi_0 \bmod q$, который посылает все n с $(n,q)=1$ в 1, а остальные в 0, называется главным характером.

L-функция Дирихле характера χ – это ряд

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Для главного характера χ_0 получаем из мультипликативности

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s).$$

Так что для главного характера L-функция мероморфна в всём $\mathbb{C}$ с полюсом в $s=1$ и асимптотикой

$$L(s,\chi_0) \sim \frac{\varphi(q)}{q(s-1)} \text{ при } s \to 1.$$

Если же χ - неглавный mod q, то

$$S_\chi(x) = \sum_{n \le x} \chi(n) = \sum_{q[\frac{x}{q}] < n \le x} \chi(n) = O(q) \Rightarrow$$

$$L(s,\chi) = s\int_1^{+\infty} \frac{S_\chi(x)}{x^{s+1}}\,dx$$ — функция голоморфна

при $\sigma > 0$.

Докажем при помощи L-функций такую теорему:

<u>Теорема 1</u> Если $(a,q) = 1$, то существует бесконечно много простых $p \equiv a \pmod q$.

Стратегия доказательства такова: рассмотрим ряд $\sum_{p \equiv a(q)} \frac{1}{p^s}$ и докажем, что при $s \to 1$ он стремится к $+\infty$ ~~расходится~~.

Чтобы это сделать, заметим, что для $\sigma > 1$ из $-\ln(1-x) = x + O(x^2)$ следует равенство

$$\ln L(s,\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$$

Далее, $\mathbb{1}_{n \equiv a(q)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(n)\overline{\chi(a)} \Rightarrow$

$$\sum_{p\equiv a(q)} \frac{1}{p^s} = \sum_p \frac{\mathbb{1}_{p\equiv a(q)}}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \ln L(s,\chi)\overline{\chi(a)} + O(1)$$

Стало быть, если количество $p \equiv a(q)$ конечно, то из наличия у $L(s, \chi_0)$ полюса в $s=1$ следует, что $L(1, \chi) = 0$ хотя бы для одного неглавного характера $\chi \bmod q$.

Если таких характеров хотя бы два, то это приводит к противоречию: при $a=1$ имеем

$$0 \leq \sum_{p\equiv 1(q)} \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \ln L(\sigma, \chi)$$

Так как $\ln L(\sigma, \chi_0) = \ln\frac{1}{1-\sigma} + O(1)$ и для некоторых χ_1 и χ_2 имеем $\ln L(\sigma, \chi_i) \leq \ln(\sigma-1) + O(1)$ (т.к. нули имеют порядок хотя бы 1), а для всех неглавных χ из голоморфности следует $\ln L(\sigma, \chi) \leq c$ для некоторого c, получаем

$$0 \leq \ln\frac{1}{\sigma-1} + \ln(\sigma-1) + \ln(\sigma-1) + O(1) = \ln(\sigma-1) + O(1).$$

Выбирая σ, близкое к 1, получаем противоречие.

Значит, если $\chi \neq \bar{\chi}$, то $L(1,\chi) \neq 0$ (иначе $L(1,\bar{\chi})$ тоже $=0$). Осталось доказать такой факт:

<u>Теорема 2</u> Если $\chi = \bar{\chi}$, т.е. χ - вещественный характер, то $L(1,\chi) \neq 0$.

<u>Замечание</u>: Вещественные характеры также называют квадратичными, так как они связаны с символами Лежандра, Якоби и Кронекера ~~и~~ и квадратичными расширениями $\mathbb{Q}$. Быстрее док-во Теоремы 2 использует формулу для числа классов $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, но мы докажем её элементарными методами.

Для доказательства нам потребуется ряд наблюдений.

1. $$\sum_{n \leq Z} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{Z} + c + O\left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)$$

2. $$\sum_{n \leq Z} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L\left(\frac{1}{2};\chi\right) + O\left(\frac{q}{\sqrt{Z}}\right)$$

3. Функция $f_\chi(n) = (1 * \chi)(n) = \sum_{d \mid n} \chi(n)$ неотрицательна

и $f_\chi(a^2) \geq 1 \quad \forall a \in \mathbb{N}$.

В третьем наблюдении оба соотношения получаются из мультипликативности и неравенства

$$f_\chi(p^\alpha) = 1 + \chi(p) + \ldots + \chi(p)^\alpha \geq 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^\alpha$$

при $\chi(p) \neq 0$ и $f_\chi(p^\alpha) = 1$ при $\chi(p) = 0$.

Из (3) следует, что

$$W(x) = \sum_{n \leq X}' \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n^2 \leq X}' \frac{1}{n} \gg \ln X.$$

Пусть $L(1;\chi) = 0$. Тогда из формулы

$$W(x) = \sum_{a \leq \sqrt{x}}' \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{b \leq x/a}' \frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} + \sum_{b \leq \sqrt{x}}' \frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} \sum_{a \leq \sqrt{x}}' \frac{1}{\sqrt{a}} -$$

$$- \sum_{a \leq \sqrt{x}}' \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sum_{b \leq \sqrt{x}}' \frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} = S_1 + S_2 - S_3$$

Получим, что $W(x) = O(1)$.

Действительно,

$$S_2 = \sum_{b \le \sqrt{x}} \frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} \cdot \sum_{a \le \frac{x}{b}} \frac{1}{\sqrt{a}} = \sum_{b \le \sqrt{x}} \frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} \left(2\sqrt{\frac{x}{b}} + c + O\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{x} \sum_{b \le \sqrt{x}} \frac{\chi(b)}{b} + O(1) = 2\sqrt{x}\left(L(1,\chi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(1) =$$

$$= 2\sqrt{x}\, L(1,\chi) + O(1) = O(1).$$

Далее,

$$S_3 = \left(2\sqrt[4]{x} + c + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\right) \cdot \left(L\left(\tfrac{1}{2};\chi\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt[4]{x}\, L\left(\tfrac{1}{2};\chi\right) + O(1). \text{ и}$$

$$S_1 = \sum_{a \le \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(L\left(\tfrac{1}{2};\chi\right) + O\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\right) =$$

$$= L\left(\tfrac{1}{2};\chi\right) \sum_{a \le \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{a}} + O(1) = 2\sqrt[4]{x}\, L\left(\tfrac{1}{2};\chi\right) + O(1).$$

$\Rightarrow W(x) = O(1)$. Противоречие. $\square$.

Так как у нас получилось, что $L(1;\chi) \neq 0$ $\forall \chi \bmod q$, это также доказывает и Теорему 1. $\square$.

Scanned by TapScanner

Функциональное уравнение для L-функций.

Чтобы доказать функциональное уравнение для $L(s,\chi)$, сначала мы введём понятие примитивных характера и найдем разложение Фурье для таких характеров.

Если χ_1, χ_2 – характеры $\bmod q_1, q_2$ и $q_1 | q_2$, то мы говорим, что χ_1 индуцирует χ_2, если

$$\chi_2(n) = \chi_1(n) \text{ при } (n, q_2) = 1.$$

Например, главный характер индуцирован тождественной единицей.

Характер χ примитивен, если он индуцирован только самим собой.

Лемма 1

Если χ – прим. $\bmod q$, то

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i n m}{q}}, \text{ где}$$

$$\tau(\chi) = \sum_{n=0}^{q-1} \chi(n) e^{\frac{2\pi i n}{q}}, \quad |\tau(\chi)| = \sqrt{q}.$$

Scanned by TapScanner

Д-во: Если $(n,q)=1$, то

$$\sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi(m)}\, e^{\frac{2\pi i n m}{q}} = \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi(n^* m)}\, e^{\frac{2\pi i n n^* m}{q}} =$$

$= \chi(n)\,\tau(\overline{\chi})$, где $nn^* \equiv 1 \pmod q$.

Осталось доказать, что $\tau(\overline{\chi}) \neq 0$ и что для $(n,q)\neq 1$ получаем 0.

Если $(n,q)\neq 1$, то ~~[illegible]~~

$nk \equiv n \bmod q \quad \forall k \equiv 1 \left(\frac{q}{(n,q)}\right) \Rightarrow$

$$\sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi(m)}\, e^{\frac{2\pi i n m}{q}} = \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi(mk)}\, e^{\frac{2\pi i n m}{q}} =$$

$= \overline{\chi}(k) \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi(m)}\, e^{\frac{2\pi i n m}{q}}$, если $(k,q)=1$.

Если сумма $\neq 0$, то $\chi(k)=1$ для любого такого k и χ не примитивен. Так что $\forall n$

$$\sum_{m=0}^{q-1} \overline{\chi}(m)\, e^{\frac{2\pi i n m}{q}} = \chi(n)\,\tau(\overline{\chi}).$$

Scanned by TapScanner

По ф-ле Планшереля, получаем

$$\sum_{n=0}^{q-1} |\chi(n)\tau(\bar{\chi})|^2 = q\sum_{m=0}^{q-1} |\bar{\chi}(m)|^2,$$ так что

$|\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{q}$. $\square$.

<u>Теорема 3</u> Пусть χ примитивен и

$\delta = 1$ для нечётных χ и 0 для чётных.

$$\varepsilon(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}\sqrt{q}}, \quad \xi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi).$$

Тогда $\xi(s,\chi) = \varepsilon(\chi)\,\xi(1-s,\bar{\chi})$.

<u>Доказательство</u>: рассмотрим функции

θ_0 и θ_1, определенные ~~[illegible]~~ формулами

$$\theta_0(t;\chi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 t}{q}}$$

$$\theta_1(t;\chi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 t}{q}}.$$

Выполнены равенства

$$\theta_0(t^{-1}, \bar{\chi}) = \frac{\sqrt{qt}}{\tau(\chi)}\, \theta_0(t, \chi)$$

$$\theta_1(t^{-1}, \bar{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\, t^{3/2}\, \theta_1(t; \chi).$$

Случай одного чётного характера и соответствующего ряда θ_0 (т.е. тождественной единицы) мы уже рассматривали ранее, поэтому тут представим только второй формулы и случая $\delta = 1$. Другая половина доказательства, впрочем, полностью аналогична.

Формула суммирования Пуассона для $e^{-\pi(x+\alpha)^2 t}$ даёт

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n\alpha - \frac{\pi n^2}{t}} = \sqrt{t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m+\alpha)^2 t}.$$

Дифференцируя по α и сократив на $2\pi i$, получим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n e^{2\pi i n\alpha - \frac{\pi n^2}{t}} = i t^{3/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (m+\alpha) e^{-\pi(m+\alpha)^2 t}.$$

Отсюда $\theta_1(t^{-1}; \bar{\chi}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n\, \bar{\chi}(n)\, e^{-\frac{\pi n^2}{qt}} =$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n}{\tau(\chi)} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \chi(m) e^{2\pi i \frac{nm}{q}} \right) e^{-\frac{\pi n^2}{qt}} =$$

$$= \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{m=0}^{q-1} \frac{\chi(m)}{\tau(\chi)} \, i \, (qt)^{3/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n + \frac{m}{q}\right) e^{-\pi q t \left(n + \frac{m}{q}\right)^2} =$$

$$= \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)} t^{3/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\chi(n) \, e^{-\frac{\pi n^2 t}{q}} =$$

$$= \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)} t^{3/2} \theta_1(t;\chi).$$

Пусть теперь χ - нечётный характер, тогда

$n\overline{\chi}(n) = |n| \, \overline{\chi}(|n|)$ и

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{s+1}{2}-1} \theta_1(t;\overline{\chi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\overline{\chi}(n) \int_0^{+\infty} t^{\frac{s+1}{2}-1} e^{-\frac{\pi n^2 t}{q}} dt =$$

$$= 2\sum_{n\geq 1} n\overline{\chi}(n) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s-1} = 2L(s,\overline{\chi}) \underbrace{\left(\frac{q}{\pi}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}_{}.$$

$$\overset{\text{и}}{2\,\xi(s,\overline{\chi})}$$

Далее, $\theta_1(t,\overline{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)} t^{-3/2} \theta_1(t^{-1},\chi) \Rightarrow$

$$2\xi(s,\overline{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{s+1}{2}-\frac{3}{2}-1} \theta_1(t^{-1};\chi) \, dt \underset{t=u^{-1}}{=\!=}$$

Scanned by TapScanner

$$= \frac{i\sqrt{q}}{\varepsilon(x)} \int\limits_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}-\frac{s+1}{2}-1}\, \theta_1(u;x)\, du =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(x)} \int\limits_0^{+\infty} u^{\frac{2-s}{2}-1}\, \theta_1(u;x)\, du = \frac{2}{\varepsilon(x)}\, \xi(1-s,x),$$ что

и требовалось доказать.