Дзета-функция Римана.
Листок 2

Задача 1. Пусть $\sigma > 0$ фиксировано. При помощи суммирования по частям докажите, что имеет место оценка

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \sum_{n \le t^{1/\sigma}+1} \frac{|S(n;t)|}{n^{\sigma+1}},$$

где

$$S(n;t) = \sum_{m \le n} m^{-it}.$$

Задача 2.

а) Пусть $k \in \mathbb{N}$ и
$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \ll T^{f(k)}.$$
При помощи формулы Перрона покажите, что
$$S(n;t) \ll \frac{n\ln(nt+2)}{t} + \sqrt{n}t^{f(k)/2k}.$$

б) Докажите, что гипотеза Линделёфа $\zeta(1/2+it) = t^{o(1)}$ выполнена тогда и только тогда, когда существует последовательность $f(k)$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f(k)}{k} = 0$ и
$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \ll T^{f(k)}.$$

Задача 3.
Каких простых k-значных чисел больше при большом k: начинающихся на 2 или 3 или начинающихся на 1 или 4?

Задача 4.
Пусть $M(x) = \sum\limits_{n \le x} \mu(n)$ — функция Мертенса.

а) Докажите, что если $\zeta(s)$ не имеет нулей с вещественной частью $\ge \sigma_0$, то для всех $s = \sigma + it$ с условием $\sigma > \sigma_0$ верно равенство
$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{+\infty} \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx.$$

б) Покажите, что
$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} > 0.$$

в) Пусть $M(x) = O(\sqrt{x})$. Докажите, что все нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой и имеют порядок 1.

Задача 5.
Пусть

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = e^{As+B}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}.$$

Найдите A и e^B.

Задача 6.

а) Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z| \leq R$, $f(0) \neq 0$ и $a_1, \ldots, a_n$ — все её нули в этом круге. Покажите, что

$$\ln|f(0)| = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{|a_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$

б) Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая оценке $|f(z)| \ll \exp(C|z|^a)$ для некоторых $C, a > 0$, а $z_1, z_2, \ldots$ — последовательность всех её нулей в порядке возрастания модуля. Докажите, что ряд

$$\sum \frac{1}{|z_n|^b}$$

сходится для всех $b > a$.

Задача 7. Вычислите

$$\sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

и покажите, что в области $|\operatorname{Im} s| \leq 4$ нет нетривиальных нулей дзета-функции. Здесь можно пользоваться любыми доступными вам приближенными формулами для элементарных функций, а также дзета-функции и её производных в натуральных точках. Например, $\ln(2\pi) \approx 1.838$, $\zeta(2) \approx 1.645$ и $\zeta'(2) \approx -0.938$.